UNIT 7

FOCUS A

INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS BY PARTIAL FRACTIONS

The algebraic technique known as partial fractions makes it possible to integrate any rational function. For instance, later in this section it will be shown how to compute the integral

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 3x + 5}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx \qquad (1)$$

[No integral table lists a form that covers (1).] The technique of partial fractions is also used in differential equations.

This section, which is purely algebraic, depends on this result from advanced algebra: Every rational function can be expressed as a sum of a polynomial (which may be 0) and constant multiples of three types of functions:

$$\frac{1}{(ax+b)^n}, \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ and } \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}. \qquad (2)$$

(Moreover, the representation is unique.)

Since any polynomial and each of the three types of rational functions in (2) can be integrated, any rational function can be integrated. The only new question of interest is "What is the method for expressing a rational function as a sum of these four types of simpler functions?" A general method is presented in this section. The resulting expression is called the partial-fraction representation of the rational function.

To express *A*/*B*, where *A* and *B* are polynomials, as the sum of partial fractions, follow these steps:

Step 1 If the degree of *A* is *equal to or greater than* the degree of *B*, divide *B* into *A* to obtain a quotient and a remainder: *A* =

INTEGRACE RACIONÁLNÍ FUNKCE ROZKLADEM NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

Algebraická technika rozkladu racionální funkce na parciální zlomky nám umožňuje integrovat jakoukoliv racionální funkci. V příkladu dále ukážeme, jak lze počítat integrál

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 3x + 5}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx \qquad (1)$$

[V tabulce integrálů není vzorec, pomocí kterého bychom mohli (1) vyjádřit.] Technika parciálních zlomků se používá také v diferenciálních rovnicích.

Tento čistě algebraický odstavec je založen na následujícím výsledku z vyšší algebry: každou racionální funkci lze vyjádřit jako součet polynomu a konstantních násobků funkcí následujících tří typů:

$$\frac{1}{(ax+b)^n}, \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ a } \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}. \qquad (2)$$

(Navíc je toto vyjádření jednoznačně určeno.)

Protože lze každý polynom a každou z racionálních funkcí daných (2) integrovat, lze integrovat jakoukoliv racionální funkci. Otázka, kterou se budeme zabývat, je „Jak postupovat při vyjadřování racionální funkce ve tvaru součtu těchto čtyř typů jednodušších funkcí?" Obecnou metodu postupu ukazujeme v tomto oddíle. Výsledný výraz nazýváme rozkladem racionální funkce na součet parciálních zlomků.

Chceme-li vyjádřit *A*/*B*, kde *A* a *B* jsou polynomy, ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků, postupujeme následujícím způsobem:

1. krok: Je-li stupeň *A* *větší nebo roven* stupni *B*, vydělíme se zbytkem polynom *A* polynomem *B*: *A* = *QB* + *R*, kde stupeň *R* je

= $QB + R$, where the degree of R is less than the degree of B or else $R = 0$. Then

$$A/B = Q + R/B.$$

Apply the remaining steps to R/B.

Step 2 If the degree of A is *less* than the degree of B, then express B as the product of polynomials of degree 1 or 2, where the second-degree factors are *irreducible*. (It can be proved that this is possible.) *No irreducible factor should simply be a constant times another irreducible factor.*

Step 3 If $px + q$ appears exactly n times in the factorization of B, form the sum

$$\frac{k_1}{px+q}+\frac{k_2}{(px+q)^2}+\ldots+\frac{k_n}{(px+q)^n},$$

where the constants $k_1, k_2, \ldots, k_n$ are to be determined later.

Step 4 If $ax^2 + bx + c$ appears exactly m times in the factorization of B, then form the sum

$$\frac{c_1x+d_1}{ax^2+bx+c}+\frac{c_2x+d_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+ \\ +\frac{c_mx+d_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

where the constants $c_1, c_2, \ldots, c_m$ and $d_1, d_2, \ldots, d_m$ are to be determined later.

Step 5 Determine the appropriate k's, c's, and d's defined in steps 3 and 4, such that A/B is equal to the sum of all the terms formed in steps 3 and 4 for all factors of B defined in step 2.

menší než stupeň B nebo $R = 0$. Pak

$$A/B = Q + R/B.$$

Zbývající postup aplikujeme na R/B.

2. krok: Je-li stupeň A *menší* než stupeň B, vyjádříme B jako součin polynomů 1. a 2. stupně, přičemž faktory druhého stupně jsou dále (v R) *nerozložitelné*. (Lze dokázat, že je to vždy možné.) *V tomto vyjádření není žádný nerozložitelný činitel konstantním násobkem jiného nerozložitelného činitele.*

3. krok: Jestliže se dvojčlen $px + q$ vyskytuje právě n-krát v rozkladu B, napíšeme součet

$$\frac{k_1}{px+q}+\frac{k_2}{(px+q)^2}+\ldots+\frac{k_n}{(px+q)^n},$$

kde konstanty $k_1, k_2, \ldots, k_n$ určíme později.

4. krok: Jestliže se trojčlen $ax^2 + bx + c$ vyskytuje právě m-krát ve faktorizaci B, utvoříme součet

$$\frac{c_1x+d_1}{ax^2+bx+c}+\frac{c_2x+d_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+ \\ +\frac{c_mx+d_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

kde konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_m$ a $d_1, d_2, \ldots, d_m$ opět určíme později.

5. krok: Určíme (vhodné) konstanty k, c a d definované ve 3. a 4. kroku tak, aby A/B bylo rovno součtu všech výrazů sestavených v těchto krocích pro všechny faktory B definované ve 2. kroku.

(From: Stein S. K., *Calculus and Analytic Geometry,* pp. 336–339 - adapted)

Phrases and linking expressions used in mathematical texts:

Definition	**Definice**
A group is (called) commutative if …	Grupa je komutativní, jestliže …
A group is said to be commutative if …	Grupa se nazývá komutativní, jestliže …
Define $f = kx$, where k is …	Nechť / Budiž $f = kx$, kde k je …
Let $f = kx$, where k is …	Nechť / Budiž $f = kx$, kde k je …

We obtain what will be referred to as …	Získáváme / Dostáváme …, což budeme dále označovat jako …
We obtain what we shall call …	Získáváme / Dostáváme …, což budeme dále nazývat jako …
We obtain what is known as …	Získáváme / Dostáváme …, známé jako …
An augmented matrix is a matrix obtained by …	Rozšířená matice soustavy je matice, kterou získáme …
Notation	**Symbolický zápis**
Let us denote by *f* the map …	Označme *f* zobrazení …
Let *f* denote the map …	Nechť *f* označuje zobrazení …
The augmented matrix will be denoted by A_r.	Rozšířenou matici soustavy budeme značit A_r.
Here A_r denotes the matrix …	A_r zde označuje matici …
Here A_r stands for the matrix …	A_r zde označuje matici …
We abbreviate exp to *e*.	*Exp* budeme krátce psát jako *e*.
We denote it briefly by *e*.	Jednoduše budeme označovat / zapisovat písmenem *e*.
We write it *e* for short.	Krátce označujeme / zapisujeme písmenem *e*.
We write it *e* for brevity.	Krátce označujeme / zapisujeme písmenem *e*.
Property	**Vlastnost**
The element *k* such that …	Prvek / element *k* takový, že …
The element *k* with the property that …	Prvek / element *k* s vlastností / jehož vlastností je …
The element *k* satisfying …	Prvek *k*, který splňuje / splňující …
The element *k* so small that …	Prvek *k*, který je tak malý, že …
The constant *k* being independent of …	Konstanta *k,* která je nezávislá na / nezávislá na …
Assumption and condition	**Předpoklad a podmínka**
Our basic assumption is the following.	Naším základním předpokladem je …
We will make the following assumptions: …	Nyní vyslovíme / uvedeme následující předpoklady: …
We assume *k* to be …	Předpokládáme, že *k* je …
It is necessary to put some restrictions on *k*.	Vlastnosti *k* je nutno omezit.
It is assumed that …	Předpokládáme, že … / Předpokládá se, že …
It is required that …	Je nutné, aby … / Požaduje se, aby …
F satisfies the condition that $F(x) = 0$.	F splňuje podmínku $F(x) = 0$.
This involves no loss of generality.	Tento postup lze použít bez újmy na obecnosti.
There exists a unique … / … one and only one …	Existuje právě jedno …
Given a positive *x* …	Předpokládejme / Mějme kladné *x* …

Theorem	**Věta**
The theorem states that …	Věta říká, že …
The theorem asserts that …	Věta říká, že …
The theorem shows that …	Věta ukazuje, že …
The theorem is an extension of …	Věta je rozšířením …
The theorem is a generalization of …	Věta je zobecněním …
The theorem is a refinement of …	Věta je upřesněním …
The theorem is a reformulation of …	Věta je jiným vyjádřením …
An equivalent formulation of (*a*) is: …	Ekvivalentní formulací (*a*) je: …
If …, then …	Jestliže …, pak …
Let *k* be … Then …, provided …	Nechť *k* je … Potom …, za předpokladu …
Let *k* satisfy … Then …	Nechť *k* splňuje … Potom …
Suppose that … Then …, unless …	Předpokládejme, že … Potom …, pokud …
Assume that … Then …	Předpokládejme, že … Potom …
… if and only if …	… tehdy a jen tehdy … / právě tehdy, když …

Proof	**Důkaz**
direct proof	přímý důkaz
indirect proof	nepřímý důkaz
proof by induction	důkaz indukcí
proof by contradiction	důkaz sporem
We first prove that …	Nejprve dokážeme, že …
We prove this as follows.	To dokážeme následujícím způsobem.
Suppose the assertion is false.	Předpokládejme, že toto tvrzení je chybné.
Assume the formula holds for k; we will prove it for $k + 1$.	Předpokládáme, že vzorec platí pro k a jeho platnost dokážeme pro $k + 1$.
It follows that $a = b$.	Z toho vyplývá, že $a = b$.
This gives $a = b$.	To nám dává (rovnost) $a = b$.
The result is $a = b$.	Výsledkem je (rovnost) $a = b$.
We thus get $a = b$.	Tímto dostáváme (rovnost) $a = b$.
… and so $a = b$.	… a tedy $a = b$.
… and consequently $a = b$.	… v důsledku čehož platí $a = b$.
… which gives $a = b$.	… což nám dává $a = b$.
… which yields $a = b$.	… což nám dává $a = b$.
… which implies $a = b$.	… což implikuje a = b.
The equality implies that …	Rovnost implikuje, že …
As x is positive, we have $ax > 0$.	Protože x je kladné, dostáváme $ax > 0$.
But $ax > 0$ since x is positive.	Ale $ax > 0$, protože x je kladné.
We conclude from (a) that …, and finally that …	Z (*a*) vyplývá, že … a nakonec také …
The same conclusion can be drawn for …	Stejný závěr lze učinit pro …
In the same manner we can see that …	Stejným způsobem lze ukázat, že …
Consider …	Uvažujte …
Choose …	Zvolte …
Define …	Definujte …
Let …	Nechť / Budiž …
Set …	Položte / Stanovte …
Let us suppose …	Předpokládejme …
Let us assume …	Předpokládejme …
Let us regard *k* as …	Uvažujme *k* takové, že …

Let us compute …	Vypočítejme …
Adding *a* to the right-hand side yields …	Připočtením *a* k pravé straně dostáváme …
Adding *a* to the right-hand side gives …	Připočtením *a* k pravé straně dostáváme …
Subtracting (2) from (1), we obtain …	Odečtením (2) od (1) získáváme …
Subtracting (2) from (1), we get …	Odečtením (2) od (1) získáváme …
Subtracting (2) from (1), we have …	Odečtením (2) od (1) získáváme …
It suffices to show that …	Postačí dokázat, že …
It is sufficient to show that …	Postačí dokázat, že …
We need only consider two cases: …	Musíme zvážit dva případy: …
We only need to show that …	Musíme ukázat, že …
The proof is completed by showing that …	Ukážeme, že … a tím bude důkaz proveden.
It is clear that …	Je zřejmé, že …
It is evident that …	Je zřejmé, že …
It is easily seen that …	Snadno vidíme / nahlédneme, že …
A trivial verification shows that …	Jednoduché ověření ukáže, že …
A trivial verification makes it obvious that …	Jednoduché ověření ukáže, že …
…, which completes the proof.	…, a tím je důkaz proveden.
…, which proves the theorem.	…, a tím je důkaz proveden.
…, which is our claim.	…, což jsme požadovali.
…, which is our assertion.	…, což odpovídá našemu tvrzení.
…, which is the desired conclusion.	…, což je požadovaný závěr.
…, and the proof is complete.	…, a tím je důkaz dokončen.
This contradicts our assumption.	To je v rozporu s naším předpokladem.
…, contrary to (*a*).	…, což je v rozporu s (*a*). / na rozdíl od (*a*).
…, which contradicts our assumptions.	…, což je v rozporu s našimi předpoklady.
…, which is impossible.	…, což není možné. / …, což je spor.

Conjunctions and prepositional phrases	**Spojky a předložková spojení**
Therefore …	Proto / tedy / z tohoto důvodu …
Thus …	A tak / tak / takto / tedy …
Hence …	Proto / z tohoto důvodu / tudíž …
Here and subsequently, …	Níže / dále …
Throughout the proof, …	Během důkazu …
In what follows, …	V následující části …
From now on, …	Od nynějška / níže / dále …
In this way, …	Takto / tímto způsobem …
For simplicity of notation, …	Stručně / jednoduše (budeme zapisovat) …
For abbreviation, …	Stručně / jednoduše (budeme zapisovat) …
… for brevity.	Stručně / jednoduše (budeme zapisovat) …
… for short.	Stručně / jednoduše (budeme zapisovat) …
Both *X* and *Y* are countable.	Jak množina *X* tak množina *Y* jsou spočitatelné.
Neither *X* nor *Y* is countable.	Ani množina *X* ani množina *Y* nejsou spočitatelné.
Neither of them is countable.	Ani jedna z nich *(ze dvou)* není spočitatelná.