Kapitola 2

Kinematika

Všechny kinematické vztahy se opírají o zákony zachování energie a hybnosti. V mnoha případech ale můžeme s výhodou použít formalismus Mandelstamových invariantů, díky kterým podoba příslušných vztahů nezávisí na výběru souřadné soustavy. Tato kapitola také stručně shrnuje Lorentzovu transformaci, kinematiku rozpadů částic, fázové objemy, účinné průřezy a luminositu. Tyto pojmy budeme využívat v následujících kapitolách. Pro přehlednost používáme v textu tato označení:

- E je celková energie částice. Kinetickou energii označujeme T, přičemž $T \equiv E - m$.
- Velikosti hybností označujeme malými písmeny (např. p_1), jde-li o vektor, je označen $\vec{p}_1$. Platí tedy $p_1 \equiv |\vec{p}_1|$.
- Čtyřhybnosti značíme vždy velkými písmeny, tedy $P \equiv (E, \vec{p})$.

2.1 Čtyřhybnosti a Mandelstamovy invarianty

Při řešení úloh z kinematiky často s výhodou využijeme zápis pomocí tzv. čtyřhybností

$$P \equiv \big(E, \vec{p}\big) \tag{2.1}$$

Snadno nahlédneme, že zachování čtyřhybností je vyjádřením zákonů zachování energie a hybnosti. Pro čtyřhybnosti definujeme skalární součin tak, aby výsledek byl relativisticky invariantní (příklad 2.1). Proto

$$P_1 \cdot P_2 \equiv E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \tag{2.2}$$

Z uvedené definice ihned plyne, že kvadrát čtyřhybnosti představuje druhou mocninu klidové hmoty částice.

Pro popis interakcí částic se často používají i tzv. Mandelstamovy invarianty s, t, u. Představme si interakci dvou částic $(1, 2)$ za vzniku obecně jiných částic $(3, 4)$

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \tag{2.3}$$

Mandelstamovy invarianty jsou pak definovány vztahy

$$s \equiv (P_1 + P_2)^2 \tag{2.4a}$$

$$t \equiv (P_1 - P_3)^2 \tag{2.4b}$$

$$u \equiv (P_1 - P_4)^2 \tag{2.4c}$$

Invariant s zjevně představuje kvadrát celkové energie soustavy v jejím těžišťovém systému (CMS), invarianty t, u lze vyjádřit pomocí s a úhlu vylétajících částic v CMS, viz příklad 2.2.

Jednoduché příklady lze řešit přímo jako soustavy rovnic dané zákony zachování energie a hybnosti (viz příklady 2.3, 2.4). Mnohem jednodušší je však využít výše uvedený formalismus, ať už Mandelstamovy invarianty (např. pro určení prahové energie reakce, viz příklad 2.6) či algebru čtyřhybností (viz příklad 2.7).

2.2 Lorentzova transformace

Lorentzova transformace spojuje kinematické veličiny energii a hybnost ve dvou různých inerciálních vztažných soustavách.

Uvažujme částici, která se v čárkované soustavě pohybuje rychlostí

$$\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c \tag{2.5}$$

ve směru kladné osy x vzhledem k původní soustavě (neboli čárkovaná soustava se pohybuje rychlostí $-\vec{\beta}$ vůči původní soustavě). V tomto speciálním případě transformace v jednom směru[1] má Lorentzova transformace tvar

$$P' = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P, \tag{2.6}$$

kde P, P' jsou sloupcové vektory čtyřhybností v prvním, resp. druhém souřadném systému a γ představuje známý relativistický faktor:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.7}$$

Maticový zápis (2.6) lze přepsat do soustavy rovnic pro jednotlivé komponenty čtyřhybností, kde hybnost $\vec{p}$ rozdělíme na složku rovnoběžnou ($p_{\parallel}$) a kolmou ($p_{\perp}$) vůči směru vzájemné rychlosti soustav $\vec{\beta}$:

$$E' = \gamma\left(E + \vec{\beta}\cdot\vec{p}\right) = \gamma\left(E + \beta p_{\parallel}\right) \tag{2.8a}$$

$$p'_{\parallel} = \gamma\left(p_{\parallel} + \beta E\right) \tag{2.8b}$$

$$p'_{\perp} = p_{\perp} \tag{2.8c}$$

[1] V anglické literatuře se obvykle používá termín Lorentz boost.

V obecném případě, tj. když hybnost částice svírá s vektorem vzájemné rychlosti soustav obecný úhel, lze ukázat:

$$\vec{p}' = \gamma \left(E + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{p} \right) \vec{\beta} + \vec{p} \tag{2.9}$$

Snadno nahlédneme, že v případě $\vec{\beta} \| \vec{p}$ se vztah (2.9) redukuje na vztah (2.8b).

2.3 Rozpady částic

Nejjednodušším případem je rozpad mateřské částice na dvě dceřiné částice. V klidovém systému rozpadající se částice, viz obr. 2.1a, lze jednoduše ze zákonů zachování hybnosti a energie odvodit vztahy:

$$E_{1,2} = \frac{M}{2} \pm \frac{m_1^2 - m_2^2}{2M} \tag{2.10a}$$

$$p_1 = p_2 = p_{\mathrm{cms}} = \frac{\sqrt{M^2 - (m_1 + m_2)^2}\sqrt{M^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2M}, \tag{2.10b}$$

kde M, m_1, m_2 jsou hmoty mateřské a dceřiných částic. U dvoučásticového rozpadu je jeho kinematika v těžišťovém systému určena jednoznačně.[2]

Složitější je tříčásticový rozpad, na který lze nahlížet jako na dva po sobě jdoucí dvoučásticové rozpady. Příslušné schéma je znázorněno na obr. 2.1b. Aplikací vztahu (2.10b) dostáváme:

$$p_{12} = p_3 = \frac{\sqrt{M^2 - (m_{12} + m_3)^2}\sqrt{M^2 - (m_{12} - m_3)^2}}{2M} \tag{2.11a}$$

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\sqrt{m_{12}^2 - (m_1 + m_2)^2}\sqrt{m_{12}^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2m_{12}} \tag{2.11b}$$

Hybnost p_3 popisuje kinematický stav 3. částice v klidovém systému rozpadající se částice, zatímco hybnost p_1^* odpovídá hybnosti 1. a 2. částice vzhledem k jejich těžišti. Veličiny M, m_1, m_2, m_3 jsou hmoty mateřské a dceřiných částic, m_{12} značí invariantní hmotu soustavy 1. a 2. částice:

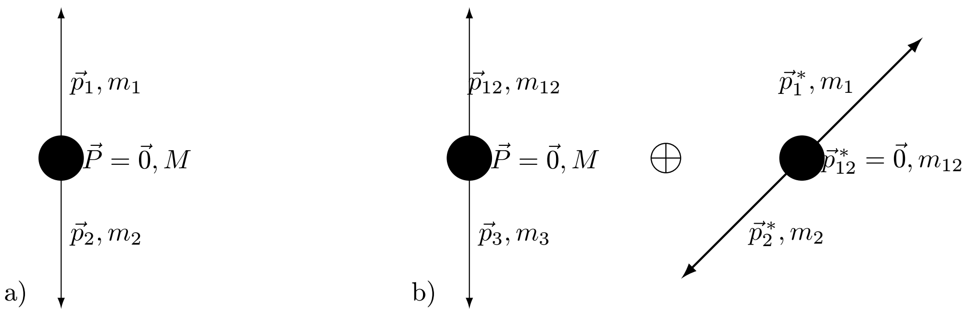
$$m_{12}^2 \equiv (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \tag{2.12}$$

Na rozdíl od dvoučásticového rozpadu zde invariantní hmota m_{12} hraje roli volného parametru, který může nabývat hodnot

$$m_1 + m_2 \leq m_{12} \leq M - m_3 \tag{2.13}$$

Minimální hodnota m_{12} odpovídá maximální hybnosti p_3 a energii E_3 (viz též příklad 2.7). Maximální hodnota m_{12} naopak odpovídá $p_3 = 0$. Poznamenejme, že kinematická konfigurace (tj. rozdělení energie mezi dceřiné částice) tříčásticového rozpadu má celkem dva volné parametry.[3]

[2] Dvoučásticový rozpad má 8 parametrů – čtyřhybnosti dceřiných částic. Ty jsou vázány zákonem zachování čtyřhybnosti (4 rovnice) a dále relativistickým vztahem (1.1) mezi energií a



Obrázek 2.1: Schéma dvoučásticového rozpadu (a) a tříčásticový rozpad (b) nahlížený jako dva po sobě jdoucí dvoučásticové rozpady, každý ve svém těžišťovém systému.

2.4 Fázový objem, luminosita, účinný průřez

V této kapitolce se budeme věnovat veličinám souvisejících s pravděpodobností interakce či rozpadu částic. Nejprve probereme problematiku fázového objemu (oddíl 2.4.1), dále se zmíníme o účinném průřezu a luminositě (oddíl 2.4.2).

2.4.1 Fázový objem

Fázovým objemem nazýváme velikost fázového prostoru. Element fázového objemu $d\Phi_{n_f}$ pro n_f částic je definován obecným vztahem[4]

$$d\Phi_{n_f} \equiv \prod_{i=1}^{n_f} \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum_{i=1}^{n_f} P_i), \tag{2.14}$$

kde P značí součet čtyřhybností částic v počátečním stavu, P_i ($\vec{p}_i$) jsou čtyřhybnosti (hybnosti) jednotlivých částic v koncovém stavu. Přítomnost δ-funkce vyjadřuje zákon zachování čtyřhybnosti. Faktor $1/((2\pi)^3 2E_i)$ souvisí s normou vlnové funkce a je volen tak, aby maticový element $\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}$ i fázový objem byly Lorentz-invariantní[5]. Fázový objem Φ_{n_f} je tedy invariantní míra při integraci přes čtyřhybnosti (viz příklad 2.11), nejsnáze jej lze počítat v těžišťovém systému. Ze vztahů (2.14) a (2.22)

hybností každé dceřiné částice. Celkem tedy máme $8-4-2=2$ volné parametry, což jsou polární a azimutální úhel výletu dceřiných částic. Tyto úhly ale nemají vliv na velikost energií a hybností dceřiných částic.

[3]Čtyřhybnosti dceřiných částic reprezentují 12 parametrů vzájemně vázaných zákonem zachování čtyřhybnosti (4 rovnice) a pro každou dceřinou částici dále platí relativistický vztah (1.1) mezi její energií a hybností (celkem 3 rovnice). Máme tedy $12-4-3=5$ volných parametrů, z nichž tři úhly (polární a azimutální úhel výletu třetí částice a azimutální úhel výletu částic 1,2 vůči směru výletu třetí částice) nemají vliv na energii a hybnost dceřiných částic. Zbývají tedy 2 volné parametry, např. invariantní hmota m_{12} a polární úhel výletu částic 1,2 vůči směru výletu třetí částice, energie 1. a 3. částice nebo invariantní hmoty m_{12} a m_{23}.

[4]Faktor $(2\pi)^4$ je věcí konvence. Buď je součástí definice fázového objemu (náš případ), nebo vystupuje samostatně ve vztazích (2.31) a (2.22).

[5]V angličtině se používá termín Lorentz-invariant phase space, LIPS.

vidíme, že rozměr fázového prostoru závisí na počtu částic v koncovém (n_f) stavu

$$\left[\Phi_{n_f}\right] = (\mathrm{GeV})^{2n_f-4} \tag{2.15}$$

Pro element fázového objemu dvoučásticového rozpadu (viz obr. 2.1a) plyne ze vztahu (2.14), viz též příklad 2.12:

$$\mathrm{d}\Phi_2(M, m_1, m_2) = \frac{1}{16\pi^2}\,\frac{p_{\mathrm{cms}}}{M}\,\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi \tag{2.16}$$

M je hmota mateřské částice a p_{cms} je hybnost dceřiných částic v těžišťovém systému, viz též vztah (2.10b). V tomto případě vyjadřuje element fázového objemu jen volnost v tom, do kterých směrů θ, ϕ se částice rozletí, přičemž všechny směry jsou z hlediska fázového objemu stejně pravděpodobné.[6] Fázový objem dvoučásticového rozpadu získáme integrací výrazu (2.16)

$$\Phi_2(M, m_1, m_2) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{p_{\mathrm{cms}}}{M} \tag{2.17}$$

Ve speciálním případě $m_1 = m_2 = 0$ dostaneme

$$\Phi_2(M, 0, 0) = \frac{1}{8\pi} \tag{2.18}$$

V případě tříčásticového rozpadu je situace složitější. Na tento problém můžeme nahlížet jako na dva po sobě jdoucí dvoučásticové rozpady (viz obr. 2.1b). Pro element fázového objemu pak platí

$$\mathrm{d}\Phi_3(M, m_1, m_2, m_3) = \mathrm{d}\Phi_2(M, m_{12}, m_3)\,\mathrm{d}\Phi_2(m_{12}, m_1, m_2)\,(2\pi)^{-1}\mathrm{d}m_{12}^2, \tag{2.19}$$

kde invariantní hmota m_{12} hraje roli jednoho ze dvou volných parametrů kinematické konfigurace tříčásticového rozpadu (viz kapitolka 2.3). Uvedený vztah lze dokázat použitím definice (2.14) na obou stranách rovnice. Díky netriviální závislosti na invariantní hmotě m_{12} nejsou všechny elementy fázového objemu tříčásticového objemu stejné a tedy různé kinematické konfigurace takového rozpadu nejsou obecně stejně pravděpodobné. Fázový objem Φ_3 získáme integrací výrazu (2.19). Jednoduché řešení existuje např. pro speciální případ rozpadu na nehmotné částice:

$$\Phi_3(M, 0, 0, 0) = (2\pi)^{-3}\,\frac{M^2}{32} \tag{2.20}$$

Na rozdíl od dvoučásticového fázového objemu má Φ_3 rozměr kvadrátu energie, viz relace (2.15). Obecně lze fázový objem Φ_n pro rozpad na n částic určit pomocí

[6] V rozpadech polarizovaných částic je netriviální úhlová závislost popsána maticovým elementem.