Předmluva

V rámci nové akreditace na oboru Učitelství byl na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v akademickém roce 2015/2016 do prvního ročníku navazujícího studia zařazen nový předmět Matematická analýza V. Jeho náplní je vícerozměrná integrace založená na Lebesgueově integrálu, což mj. vyžaduje seriózní vybudování Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^d$. Poznamenejme, že výklad integrálního počtu funkcí více proměnných vycházející z Riemannova integrálu je těžkopádný, a tudíž neuspokojivý z celé řady důvodů (např. problém limitních přechodů, integrace na kartézském součinu apod.). Tento text nemá za cíl prezentovat *teorii míry* a *teorii integrálu*, k tomu slouží jiné učební pomůcky a jiné přednášky. Přestože je v tomto textu důraz kladen na euklidovský prostor a na početní techniku, považoval jsem za vhodné v části výkladu přejít do abstraktního kontextu prostoru s mírou a Lebesgueova integrálu pro obecnou míru. Důvodem není touha po abstrakci pro abstrakci, přechod do obecnějšího rámce činí výklad přehlednějším a lépe vystupují do popředí ty základní rysy lebesgueovské integrace, které nikterak s euklidovským prostorem nesouvisejí.

Kap. 1 připomíná základní výsledky a označení z matematické analýzy, které se v dalším užívají. V kap. 2 jsou definovány lebesgueovsky měřitelné množiny a Lebesgueova míra v euklidovském prostoru a jsou uvedeny jejich podstatné vlastnosti. V kap. 3 je zaveden prostor s mírou a jsou dokázány základní výsledky o chování abstraktní míry. Kap. 4 nejprve uvádí motivaci pojmu měřitelné funkce a dále jsou diskutovány důležité vlastnosti měřitelných funkcí. V kap. 5 jsou vyloženy základní vlastnosti abstraktního Lebesgueova integrálu a je dokázána úplnost prostoru L^p. Jako ilustrace užitečnosti Lebesgueova integrálu je zařazen výklad o ortonormálních posloupnostech a Fourierových řadách v prostoru L^2. V kap. 6 jsou uvedeny zcela základní výsledky o trigonometrických Fourierových řadách.

Těžištěm textu jsou kap. 6 a 7 věnované lebesgueovské integraci pro funkce více proměnných. Na padesátce řešených školních, většinou tradičních, příkladech je ilustrována početní technika Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}^d$.

S ohledem na zaměření textu nejsou zařazena cvičení teoretického charakteru, která jsou pro zájemce k dispozici např. v [140], [159], [212]. Důkazy tří významných výsledků uvedených v kap. 2 (existence Lebesgueovy míry) a kap. 6 (Fubiniho věta a věta o substituci) jsou zařazeny do kap. 8, 9 a 10. Jedná se o poměrně náročné a pracné důkazy, které obvykle nemohou být do přednášky zařazeny se všemi detaily. Poznámky a komentáře (kap. 11) zahrnují dodatky k probírané látce, náměty pro samostatnou četbu, odkazy na literaturu monografického a časopiseckého charakteru a také poměrně rozsáhlé historické komentáře. V závěrečné kapitole uvádíme jména významných matematiků, kteří v období 1820 – 1920 ovlivnili vývoj teorie míry a integrálu zásadním způsobem. U několika z nich jsou připojeny životopisné medailonky.

Děkuji Bc. Tomáši Zadražilovi za přepis a doc. A. Slavíkovi za připomínky k textu a za provedení grafických úprav. Obzvláště oceňuji významnou pomoc doc. J. Veselého při technickém zpracování a finálním typografickém ztvárnění textu.

Praha, červen 2016 Ivan Netuka

Tento text vznikl za podpory projektu Inovace předmětu Matematická analýza ve studijním oboru Učitelství matematiky v rámci Tematického okruhu I (Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2016).