Kapitola 6

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$

Víme, že $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda_d)$ je prostor s mírou. Místo $L^1(\lambda_d)$ se obvykle píše $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pokud $A \in \mathcal{L}^d$, můžeme uvažovat restrikci σ-algebry $\mathcal{L}^d$ na A a restrikci λ_d na měřitelné podmnožiny A. Dostáváme tak nový prostor s mírou $(A, \mathcal{L}^d(A), \lambda_d|_A)$, kde $\mathcal{L}^d(A) := \{\widetilde{A} \cap A : \widetilde{A} \in \mathcal{L}^d\}$ a $\lambda_d|_A(B) := \lambda_d(B)$, $B \in \mathcal{L}^d(A)$. Výrok „$f \in L^1$ na A“ nebo „$f \in L^1(A)$“ znamená, že f je integrovatelná na tomto prostoru s mírou. Analogický význam má symbol $L^*(A)$.

Je-li $d = 1$, a, $b \in \mathbb{R}$, I je některý z intervalů $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) a $f \in L^1(I)$, pak se obvykle místo $\int_I f \, d\lambda_1$ užívá označení

$$\textstyle\int_a^b f \text{ nebo } (L) \int_a^b f.$$

Často se píše

$$\int_a^b f(x) \, dx \ .$$

Symboly $\int_a^\infty f$, $\int_{-\infty}^b f$ a také $L^p(I)$ nebo $L^p((a, b))$ mají zřejmý význam.

Protože Lebesgueova míra každé jednobodové množiny je rovna nule, nehraje roli, zda koncové body intervalu do integračního oboru patří či nikoli.

Lebesgueův, Riemannův a Newtonův integrál

Definice Lebesgueova integrálu neposkytuje prakticky žádnou možnost výpočtu v konkrétních situacích.

Nejprve ukážeme, že Lebesgueův integrál je zobecněním Riemannova integrálu, který budeme značit $(R) \int_a^b f$.

Věta 6.1 (o vztahu Lebesgueova a Riemannova integrálu)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$. Je-li f riemannovsky integrovatelná, je lebesgueovsky integrovatelná a*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f\,.$$

Důkaz. Nechť $D := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $[a,b]$. Nechť $M := \sup |f|([a,b])$ a

$$m_j := \inf f([x_{j-1},x_j]),\ M_j := \sup f([x_{j-1},x_j]),$$

$$\alpha_D := m_j \text{ na } (x_{j-1},x_j],\ \beta_D := M_j \text{ na } (x_{j-1},x_j],\quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

$$\alpha_D(a) = -M \text{ a } \beta_D(a) = M.$$

Dále definujeme

$$s(D) := \textstyle\sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\quad S(D) := \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Nechť $\{D_j\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Budeme říkat, že $\{D_j\}$ je *vhodná posloupnost* dělení, jestliže D_{j+1} je zjemněním dělení D_j, $j \in \mathbb{N}$, a normy dělení D_j konvergují k nule. Víme, že funkce f je riemannovsky integrovatelná, právě když

$$\lim_{j\to\infty} s(D_j) = \lim_{j\to\infty} S(D_j)$$

pro každou vhodnou posloupnost dělení $\{D_j\}$. Společná hodnota těchto limit je rovna $(R)\int_a^b f$.

Nechť $\{D_j\}$ je vhodná posloupnost dělení. Místo α_{D_j} (resp. β_{D_j}) budeme psát α_j (resp. β_j). Zřejmě platí

$$-M \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \ldots \leqslant f \leqslant \ldots \beta_2 \leqslant \beta_1 \leqslant M\,.$$

Označme $\alpha := \lim_{j\to\infty} \alpha_j$, $\beta := \lim_{j\to\infty} \beta_j$. Platí $-M \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant M$. Podle Lebesgueovy věty 5.8 (za integrovatelnou majorantu lze užít konstantní funkci M) platí

$$(L)\int_a^b \alpha = (L)\int_a^b \lim_{j\to\infty} \alpha_j = \lim_{j\to\infty} (L)\int_a^b \alpha_j = \lim_{j\to\infty} s(D_j)\,.$$

Podobně

$$(L)\int_a^b \beta = \lim_{j\to\infty} S(D_j)\,.$$

Jestliže f je riemannovsky integrovatelná, platí

$$(L)\int_a^b \alpha = (L)\int_a^b \beta\,,$$

tedy

$$(L)\int_a^b (\beta-\alpha) = 0\,.$$

Protože $\beta-\alpha \geqslant 0$, platí $\alpha=\beta$ s.v. na $[\,a,b\,]$ (vzhledem k míře λ_1). Protože $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$, je $f=\alpha$ s.v., tedy $f \in L^1([\,a,b\,])$ a

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b \alpha = \lim_{j\to\infty} s(D_j) = (R)\int_a^b f\,.$$

□

Je možné ověřit, že pokud $x \in [\,a,b\,]$ není dělícím bodem žádného z dělení D_j, $j \in \mathbb{N}$, pak $\alpha(x)=\beta(x)$, právě když funkce f je spojitá v bodě x. Spočetná množina dělících bodů všech dělení D_j má míru nula. Nyní je vidět, že omezená funkce je riemannovsky integrovatelná, právě když je spojitá skoro všude.

Věta 6.2 (o výpočtu Lebesgueova integrálu pomocí primitivní funkce)**.** *Nechť $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, f je spojitá funkce na (a,b) a F je primitivní funkce k funkci f. Jestliže $f \in L^*((a,b))$, potom existují jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$ a*

$$(L)\int_a^b f = F(b-) - F(a+)\,.$$

Důkaz. Nejprve připomeňme, že pro každou spojitou funkci na (a,b) existuje primitivní funkce. Zvolme $c \in (a,b)$, čísla $b_j \in (c,b)$, $j \in \mathbb{N}$, taková, že posloupnost $\{b_j\}$ je neklesající s limitou b a nechť φ_j je charakteristická funkce intervalu (c,b_j). Potom $\{\varphi_j f^+\}$ je neklesající posloupnost. Podle Leviho věty 5.3 platí

$$\lim_{j\to\infty}(L)\int_c^b \varphi_j f^+ = (L)\int_c^b f^+\,.$$

Označme F_1 primitivní funkci k funkci f^+. Víme, že

$$(L)\int_c^b \varphi_j f^+ = (L)\int_c^{b_j} f^+ = (R)\int_c^{b_j} f^+ = F_1(b_j) - F_1(c)\,.$$

Funkce F_1 je neklesající na (c,b), neboť $F_1' = f^+ \geqslant 0$. Proto existuje limita $F_1(b-)$ (vlastní nebo ∞). Dostáváme

$$(L)\int_c^b f^+ = F_1(b-) - F_1(c)\,.$$

Podobně se dokáže, že existuje limita $F_1(a+)$ (vlastní nebo $-\infty$) a platí

$$(L)\int_a^c f^+ = F_1(c) - F_1(a+)\,.$$

Odtud sečtením dostaneme

$$(L)\int_a^b f^+ = F_1(b-) - F_1(a+)\,.$$

(pravá strana je reálné číslo nebo ∞).

Je-li F_2 primitivní funkce k funkci f^-, podobně se dokáže, že

$$(L)\int_a^b f^- = F_2(b-) - F_2(a+)$$

(pravá strana je reálné číslo nebo ∞). Podle předpokladu je $f \in L^*((a,b))$. Je-li tedy $F_1(b-) - F_1(a+) = \infty$, pak $F_2(b-)$, $F_2(a+)$ jsou reálná čísla. Pokud $F_2(b-) - F_2(a+) = \infty$, jsou $F_1(b-)$, $F_1(a+)$ reálná čísla. Tudíž výraz $F_1(b-) - F_1(a+) - (F_2(b-) - F_2(a+))$ má smysl. Protože $F' = f$, $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f^+ - f^- = f$, liší se funkce F, $F_1 - F_2$ o konstantu. Dostáváme

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b f^+ - (L)\int_a^b f^- =\\ = F_1(b-) - F_2(b-) - (F_1(a+) - F_2(a+)) = F(b-) - F(a+)\,.\end{aligned}$$

□

Při vyšetřování Fourierových řad budeme užívat následující větu o aproximaci.

Věta 6.3. *Nechť $p \geqslant 1$, $f \in L^p((a,b))$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá funkce g na $[a,b]$ taková, že $g(a) = g(b)$ a $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$.*

Důkaz. Větu stačí dokázat za předpokladu, že funkce f je reálná. Definujme $f_j := \min(\max(f,-j),j)$, $j \in \mathbb{N}$. Potom

$$|f - f_j|^p \leqslant (2\max(|f_j|,|f|))^p \leqslant 2^p|f|^p\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

a $\lim_{j\to\infty} |f_j - f|^p = 0$. Podle Lebesgueovy věty (věta 5.8) existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro funkci $\widetilde{f} := f_k$ platí

$$\int_a^b |f - \widetilde{f}|^p \leqslant (\varepsilon/3)^p \,. \tag{6.1}$$

Protože $|\widetilde{f}| \leqslant k$, podle věty 4.4 existují spojité funkce $\widetilde{g}_j$ na $[\,a, b\,]$ takové, že $|\widetilde{g}_j| \leqslant k$ a $\widetilde{f} = \lim_{j\to\infty} \widetilde{g}_j$ skoro všude. Znovu aplikujeme Lebesgueovu větu: existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro funkci $\widetilde{g} := \widetilde{g}_m$ platí

$$\int_a^b |\widetilde{f} - \widetilde{g}|^p \leqslant (\varepsilon/3)^p \,. \tag{6.2}$$

Zřejmě existují spojité funkce h_j na $[\,a, b\,]$ takové, že $h_j(a) = h_j(b), j \in \mathbb{N}$, $|h_j| \leqslant k$ a $\lim_{j\to\infty} h_j = \widetilde{g}$ na (a, b). (V okolí bodů a, b nahradíme funkci $\widetilde{g}$ např. vhodnou lineární funkcí.)

Opět podle Lebesgueovy věty existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro $g := h_n$ platí

$$\int_a^b |\widetilde{g} - g| \leqslant (\varepsilon/3)^p \,. \tag{6.3}$$

Z nerovností (6.1), (6.2), (6.3) a z Minkowského nerovnosti dostáváme odhad $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. □

Poznámka 6.4. Při studiu Fourierových řad bude užitečné si uvědomit, že

$$L^2\big((-\pi, \pi)\big) \subset L^1\big((-\pi, \pi)\big) \,. \tag{6.4}$$

Podle Hölderovy nerovnosti (věta 5.14) platí pro $f \in L^2\big((-\pi, \pi)\big)$ a $g = 1$ na $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f| \leqslant \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\Big)^{1/2} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} 1\Big)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 < \infty \,.$$

Trigonometrický systém a Fourierovy řady

Definujme

$$\exp z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \,, \quad z \in \mathbb{C} \,.$$

Řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C}$ a platí

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \,, \quad z, w \in \mathbb{C} \,,$$
$$\exp' = \exp \,.$$