Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole připomeneme základní pojmy a označení, které budeme užívat.

Bod $x \in \mathbb{R}^d$ je d-tice reálných čísel,

$$x = (x_1, \dots, x_d), \quad x_j \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \dots, d\}\,.$$

Norma $x \in \mathbb{R}^d$ je obvyklá euklidovská norma:

$$|\, x\,| := (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}\,.$$

Užíváme běžná množinová označení pro průnik a sjednocení; $A \setminus B$ je rozdíl množin A a B a A^c je doplněk množiny A.

Jsou-li A a B neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}^d$, jejich **vzdálenost** je definována rovností

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf |\, x - y\,|\,,$$

kde infimum se bere přes všechna $x \in A$ a $y \in B$. Je-li $x \in \mathbb{R}^d$, $A = \{x\}$, potom píšeme místo $\operatorname{dist}\big(\{x\}, B\big)$ pouze $\operatorname{dist}\,(x, B)$.

Průměr neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ je definován rovností

$$\operatorname{diam} A := \sup |\, x - y\,|\,,$$

kde supremum se bere přes všechna x, $y \in A$. Neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **omezená**, jestliže $\operatorname{diam} A < \infty$.

Pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $r > 0$ definujeme otevřenou kouli $B_r(x)$ o středu x a poloměru r

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : |\, y - x\,| < r\}\,.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. **Vnitřek** množiny A je definován jako množina všech bodů $x \in \mathbb{R}^d$, pro něž existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset A$; značí se A°.

Množina $A \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **otevřená**, jestliže $A = A^\circ$. Tedy množina A je otevřená, jestliže pro každé $x \in A$ existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset A$. Zřejmě $B_r(x)$ je otevřená množina.

Z definice je zřejmé, že libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina a průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}^d$ je **uzavřená**, jestliže A^c je otevřená množina. Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina a sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Množina $A \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **kompaktní**, jestliže je uzavřená a omezená.

Připomeňme **Borelovu větu**: *Jestliže $A \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní množina, V_α, $\alpha \in I$, jsou otevřené množiny takové, že $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, potom existuje konečná množina $F \subset I$ taková, že $A \subset \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha$. Jinak řečeno: z každého otevřeného pokrytí množiny A lze vybrat konečné pokrytí.*

Je známo, že platí obrácené tvrzení: *Jestliže $A \subset \mathbb{R}^d$ a z každého otevřeného pokrytí množiny A lze vybrat konečné pokrytí, potom A je kompaktní množina.*

Ukážeme, že $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, pokud $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, A je kompaktní množina, B je uzavřená množina a $A \cap B = \emptyset$. K důkazu užijeme Borelovu větu. Pro každý bod $x \in A$ existuje $r(x) > 0$ takové, že

$$\operatorname{dist}\big(x, B\big) \geqslant 3r(x)\,.$$

Z pokrytí $\{B_{2r(x)}(x)\}_{x \in A}$ vybereme konečné: existují body $x_1, \dots, x_n \in A$ takové, že

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{2r(x_j)}(x_j)\,.$$

Označme $r := \min\big(r(x_1), \dots, r(x_n)\big)$. Tvrdíme, že $\operatorname{dist}(A,\, B) > r$. Je-li $x \in A$, pak existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $|\, x - x_j \,| < 2r(x_j)$. Pro každé $y \in B$ je $|\, x_j - y \,| \geqslant 3r(x_j)$, tudíž

$$|\, x - y \,| \geqslant |\, x_j - y \,| - |\, x - x_j \,| > r(x_j) \geqslant r\,.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$, $F : A \to \mathbb{R}^m$. Připomeňme, že *zobrazení F je spojité, právě když pro každou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^m$ je její vzor $F^{-1}(V)$ otevřená množina v A* (tj. existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $F^{-1}(V) = A \cap U$).

V dalším výkladu se nám bude hodit toto tvrzení: *Jestliže $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, potom existují kompaktní množiny $L_1, L_2, \dots$ takové, že $L_j \subset L_{j+1}^\circ$, $j \in \mathbb{N}$, a $G = \bigcup_{j=1}^\infty L_j$.*

Pro $G = \mathbb{R}^d$ je tvrzení zřejmé, stačí zvolit $L_j := \{x \in \mathbb{R}^d : |\,x\,| \leqslant j\}$. Je-li $G \neq \mathbb{R}^d$, definujeme funkci

$$f : x \mapsto \operatorname{dist}\big(x, G^c\big)\,, \quad x \in G\,.$$

Pro $x, y \in G$ a $z \in G^c$ platí $\operatorname{dist}\big(x, G^c\big) \leqslant |\,x - z\,| \leqslant |\,x - y\,| + |\,y - z\,|$, takže

$$\operatorname{dist}\big(x, G^c\big) \leqslant |\,x - y\,| + \operatorname{dist}\big(y, G^c\big)\,.$$

Odtud plyne

$$|\,f(x) - f(y)\,| \leqslant |\,x - y\,|\,, \quad x, y \in G\,.$$

Funkce f je tudíž spojitá, takže pro každé $j \in \mathbb{N}$ je množina

$$\big\{x \in G : f(x) \geqslant 1/j\big\} = \big(f^{-1}((-\infty, 1/j\,))\big)^c$$

uzavřená, tedy

$$L_j := \{x \in G : f(x) \geqslant 1/j,\ |x| \leqslant j\}$$

je kompaktní množina. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $y \in L_j$, potom y je prvkem množiny

$$\{x \in G : f(x) > 1/(j+1),\ |x| < j+1\}\,,$$

což je otevřená podmnožina množiny L_{j+1}. Tedy $y \in L_{j+1}^\circ$, takže $L_j \subset L_{j+1}^\circ$. Je-li $x \in G$, pak $f(x) > 0$, tudíž existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in L_j$. Dokázali jsme, že $G = \bigcup_{j=1}^\infty L_j$.

Uveďme ještě toto tvrzení: *Nechť $F \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná uzavřená množina, $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, pro niž $G^c \neq \emptyset$ a nechť $F \subset G$. Potom existuje spojitá funkce $h : \mathbb{R}^d \to [\,0, 1\,]$ taková, že $h = 1$ na F a $h = 0$ na G^c.* Tuto vlastnost má např. funkce

$$h : x \mapsto \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Nyní dokážeme, že pro kompaktní množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ a spojité zobrazení $F : A \to \mathbb{R}^m$ je obraz $F(A)$ kompaktní.

Nechť $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí množiny $F(A)$ a $U_\alpha := F^{-1}(V_\alpha)$, $\alpha \in I$. Potom je $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí množiny A. Podle Borelovy věty existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Protože $F\big(F^{-1}(B)\big) \subset B$ pro každou množinu $B \subset \mathbb{R}^m$, platí

$$F(A) \subset \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha\,,$$

takže $F(A)$ je kompaktní množina.

Dále dokážeme tyto důležité výsledky:

(a) *Je-li $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná kompaktní množina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, potom je funkce f omezená a nabývá na A minima a maxima.*

(b) *Je-li $A \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní množina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, potom je funkce f stejnoměrně spojitá.*

Podle definice to znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$, kdykoli $x,\, y \in A$ a $|\, x - y\,| \leqslant \delta$.

Důkaz tvrzení (a) lze provést například takto: víme, že $f(A)$ je kompaktní množina, takže funkce f je omezená. Nechť $m := \inf f(A)$ a nechť $A_j := \{x \in A : f(x) \leqslant m + 1/j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Potom A_j je uzavřená množina a $A_{j+1} \subset A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$; odvodíme spor. Pro $U_j := A_j^c$ je $U_j \subset U_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, a $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny A. Podle Borelovy věty existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$A \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k = U_k = A_k^c\,.$$

Pro každé $x \in A$ tudíž platí $f(x) > m + 1/k$, což je ve sporu s definicí čísla m. Je-li $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, pak $f(x_0) = m$. Podobně se dokáže, že funkce f nabývá na A maxima.

Nakonec uvedeme netradiční důkaz tvrzení (b). Množina $A \times A \subset \mathbb{R}^{2d}$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce

$$F : (x,y) \mapsto |\, f(x) - f(y)\,|\,, \quad (x,y) \in A \times A\,,$$

je spojitá na $A \times A$. Nechť $\varepsilon > 0$ a

$$M(\varepsilon) := \big\{(x,y) \in A \times A : F(x,y) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Potom $M(\varepsilon)$ je uzavřená podmnožina $A \times A$, tudíž je kompaktní. Je-li $M(\varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x, y \in A$ platí

$$|\, f(x) - f(y)\,| = F(x,y) < \varepsilon\,. \tag{1.1}$$

Nechť $M(\varepsilon) \neq \emptyset$. Protože funkce $(x,y) \mapsto |\, x - y\,|$, $(x,y) \in M(\varepsilon)$, je spojitá na $M(\varepsilon)$, podle tvrzení (a) existuje bod $(x_0, y_0) \in M(\varepsilon)$ takový, že

$$|\, x_0 - y_0\,| \leqslant |\, x - y\,|\,, \quad (x,y) \in M(\varepsilon)\,.$$

Protože platí $|\, f(x_0) - f(y_0)\,| = F(x_0, y_0) \geqslant \varepsilon$, je $x_0 \neq y_0$. Zvolme nyní $0 < \delta < |\, x_0 - y_0\,|$. Jestliže $x, y \in A$ a $|\, x - y\,| \leqslant \delta$, potom $(x,y) \notin M(\varepsilon)$, tudíž platí (1.1). Vidíme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na A.