KAPITOLA 3

PLOŠNÝ INTEGRÁL V $\mathbb{R}_3$

V této kapitole stručně vyložíme pojmy plochy (a zobecněné plochy) v $\mathbb{R}_3$, plošného obsahu této plochy a integrálu přes tuto plochu (plošného integrálu). Plošný integrál použijeme v následující kapitole k formulaci vět Gaussovy-Ostrogradského a Stokesovy.

3.1. Plochy v $\mathbb{R}_3$

Pro pohodlí čtenáře připomeneme nejdříve Lipschitzovu podmínku (uvedli jsme ji už v předchozí kapitole):

Definice 3.1. Nechť f je reálná funkce dvou proměnných, definovaná na množině $D \subset \mathbb{R}_2$. Řekneme, že f splňuje na D Lipschitzovu podmínku s konstantou $K \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $w = (u,v) \in D$, $\tilde{w} = (\tilde{u},\tilde{v}) \in D$ platí

$$|f(w) - f(\tilde{w})| \leq K||w - \tilde{w}||$$

(nalevo je absolutní hodnota, napravo $||.||$ značí normu v $\mathbb{R}_2$, tj. $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ pro $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2$). Řekneme, že zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ z $\mathbb{R}_2$ do $\mathbb{R}_3$ je na D lipschtzovské (splňuje tam Lipschitzovu podmínku), jestliže je na D lipschtzovská každá jeho složka Φ_j, $j = 1,2,3$.

Definice 3.2. Množinu $M \subset \mathbb{R}_3$ nazveme plochou, jestliže existuje otevřená měřitelná množina $D \subset \mathbb{R}_2$ a zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ množiny D do $\mathbb{R}_3$ takové, že

1) Φ je na D spojitě diferencovatelné a hodnost jeho Jacobiho matice

$$\frac{\mathcal{D}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\mathcal{D}(u,v)} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

je rovná 2 pro každé $(u,v) \in D$.

2) Φ splňuje na D Lipschitzovu podmínku,

3) $\Phi(D) = M$.

Takové zobrazení Φ (přesněji dvojici (Φ, D)) nazveme *parametrizací* nebo *parametrickým zadáním* plochy M a množinu D nazveme *množinou parametrů.*

Je-li Φ navíc prosté na D a Φ^{-1} je na M spojité, pak říkáme, že M je *jednoduchá plocha.*

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Příklad 3.1. (explicitní zadání plochy) Je-li $D \subset \mathbb{R}_2$ otevřená a měřitelná a funkce g je na M spojitě derivovatelná a splňuje tam Lipschitzovu podmínku, pak zobrazení

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u,v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in D,$$

je parametrizací jednoduché plochy $M = \Phi(D)$. M je grafem funkce g. Za parametry bereme souřadnice x a y bodu plochy ($x = u$, $y = v$, $z = g(u,v)$).

Jediné, co je třeba ověřit, je splnění podmínky jednoduchosti.

1) (prostota Φ) Je-li pro nějaká $w = (u,v)$ $\tilde{w} = (\tilde{u},\tilde{v})$ z D $\Phi(w) = \Phi(\tilde{w})$, což znamená

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ g(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix},$$

pak je $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$.

2) (spojitost Φ^{-1}) Z malosti $||(x,y,z) - (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})||_3$ (norma v $\mathbb{R}_3$), kde $(x,y,z) = \Phi(w) \in M$, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \Phi(\tilde{w}) \in M$, máme ukázat, že je malé $||w - \tilde{w}||_2$ (norma v $\mathbb{R}_2$). To plyne ale z následujících (skoro zřejmých) rovností a nerovností

$$||\Phi^{-1}(x,y,z) - \Phi^{-1}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})||_2 = ||w - \tilde{w}||_2 = ||(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})||_2 \leq ||(x,y,z) - (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})||_3.$$

Poznamenejme že analogická situace je v případě zobrazení

$$\tilde{\Phi}(u,v) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u \\ g(u,v) \\ v \end{pmatrix},\ \hat{\Phi}(u,v) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g(u,v) \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

která zadávají druhou resp. první souřadnici bodu na ploše jako funkci zbylých souřadnic tohoto bodu.

Příklad 3.1a. (implicitní zadání plochy) Plochu v $\mathbb{R}_3$ je možné zadat také pomocí jedné rovnice jako množinu M těch $(x,y,z) \in \mathbb{R}_3$, které vyhovují rovnici

$$F(x,y,z) = 0,$$

kde F je spojitě derivovatelná funkce taková, že v každém bodě $(x,y,z) \in M$ je alespoň jedna z derivací $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ nenulová. Například rovnice $ax + by + cz + d = 0$ zadává rovinu, rovnice $(x-A)^2/a^2 + (y-B)/b^2 + (z-C)^2 - 1 = 0$ zadává elipsoid se středem v bodě (A,B,C) a poloosami a, b, c. Vektor se složkami $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ je tzv. *normálovým vektorem* k M v bodě $(x,y,z) \in M$.

Příklad 3.2. (parametrizace kulové plochy) Kulovou plochu se středem v počátku a poloměrem R můžeme zadat pomocí zobrazení Φ daného předpisem

$$\begin{aligned} x =& \Phi_1(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y =& \Phi_2(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\sin\theta,\ \varphi \in (0,2\pi),\ \theta \in (0,\pi). \\ z =& \Phi_3(\varphi,\theta) = R\cos\theta, \end{aligned}$$

které ji zadává ne celou, ale bez „poledníku”, ležícího v polorovině $y = 0$, $x \geq 0$. (Dá se ukázat, že celou ji parametricky – jako jednoduchou plochu ve smyslu definice 3.2 – zadat nelze.)

Cvičení. Pomocí sférických souřadnic zadejte kuželovou plochu $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ (opět bez površky v polorovině $y = 0$, $x \geq 0$).

Poznámka. Vzhledem k tomu, že v definici 3.2 se nepředpokládá, že množina parametrů D je souvislá, dalo by se ukázat, že povrch krychle bez hran je jednoduchá plocha.

3.2. Plošný obsah rovinných množin $M \subset \mathbb{R}_3$

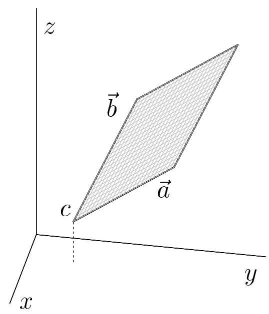
Než si začneme vyjasňovat, co budeme rozumět pod plošným obsahem obecné plochy v $\mathbb{R}_3$, ujasníme si, co budeme rozumět pod plošným obsahem plochy M, která leží v nějaké rovině v $\mathbb{R}_3$.

Pomocí vhodného zobrazení ψ tvaru $\psi(x) = \hat{x} + Ax$, kde $\hat{x}$ je vhodný prvek z $\mathbb{R}_3$ a A je vhodná ortogonální matice stupně 3 (takové zobrazení zachovává vzdálenosti bodů), můžeme rovinu, v níž M leží zobrazit na rovinu $z = 0$. Při tomto zobrazení přejde množina M na jistou množinu $\tilde{M}$, jejíž body mají třetí souřadnici nulovou. Chápeme-li $\tilde{M}$ jako množinu v $\mathbb{R}_2$, pak (za předpokladu, že je měřitelná) jí můžeme přisoudit míru $\mu_2(\tilde{M})$, kde μ_2 je Jordanova míra v $\mathbb{R}_2$. Je přirozené pod plošným obsahem (dvojrozměrnou mírou) původní množiny rozumět právě číslo $\mu_2(\tilde{M})$; upozorněme hned, že $\mu_3(M) = 0$ (proč?). (Indexy dole u μ značíme, o jakou míru – v jakém $\mathbb{R}_r$ – se jedná.)

Uvážíme nejdříve „rovinné" množiny speciálního tvaru

$$M = P(c, a, b) = \{c + ua + vb,\ u \in (0, 1),\ v \in (0, 1)\},$$

kde c, a, b jsou dané prvky z $\mathbb{R}_3$. Taková množina se nazývá *rovnoběžníkem* s jedním vrcholem v bodě c a sestrojeným na vektorech a a b (viz obrázek 3.1)



Obr. 3.1

K vyjádření plošného obsahu takového rovnoběžníka bude užitečný pojem *vektorového součinu* dvou vektorů z $\mathbb{R}_3$:

Definice 3.3. Vektorovým součinem $a \times b$ dvou vektorů $a, b \in \mathbb{R}_3$ rozumíme vektor

$$a \times b \overset{\text{def}}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Zapamatovat si tvar vektorového součinu je možné pomocí formálního determinantu

$$\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{pmatrix},$$

kde $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ je kanonické báze v $\mathbb{R}_3$ a determinanty si myslíme vyjádřené pomocí rozvoje podle prvního řádku resp. posledního sloupce.

Vektorový součin má následující vlastnosti:

Věta 3.1.
1) $a \times b = 0 \Leftrightarrow a, b$ *jsou lineárně závislé.* $b \times a = -a \times b$

2) pro $c \in \mathbb{R}_3$ *je* $((a \times b), c) = \det(a, b, c)$, *kde nalevo* $(,)$ *značí skalární součin a napravo* (a, b, c) *značí matici, jejímiž sloupci jsou (sloupcové) vektory* a, b, c.

3) $a \times b$ *je ortogonální k* a *i* b.

4) $||a \times b||^2 = \det\begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{pmatrix} = ||a||^2||b||^2 - |(a,b)|^2$. *Matice zde se vyskytující se nazývá Gramovou maticí vektorů* a, b.

5) Je-li S *ortogonální matice, pak* $||Sa \times Sb|| = ||a \times b||$.

6) $||a \times b||$ *je rovno plošnému obsahu rovnoběžnostěnu, sestrojenému na vektorech* a, b.

Důkaz. 1) plyne z toho, že a a b jsou lineárně závislé právě když všechny tři subdeterminanty stupně 2 matice, jejímiž řádky (sloupci) jsou vektory a a b jsou rovny nule a z toho, že složky vektorového součinu jsou právě tyto subdeterminanty (s příslušnými znaménky). Druhá část plyne z toho, že při přehození dvou řádků (sloupců) v determinantu determinant změní znaménko.

2) je zřejmé z rozvoje determinantu podle posledního sloupce.

3) plyne z 2) a toho, že determinant matice se dvěma stejnými sloupci je roven nule.

4) Uvážíme-li (T značí transponovanou matici)

$$\det((a, b, a \times b)^T (a, b, a \times b)),$$

dostaneme, že to je jednak rovné $(\det(a, b, a \times b))^2 = (||a \times b||^2)^2$, neboť determinant součinu je roven součinu determinantů a determinant transponované matice je stejný jako determinant původní matice a zřejmě dále je $\det(a, b, a \times b) = ||a \times b||^2$. Na druhé straně to je rovno (podle pravidla o násobení matic)

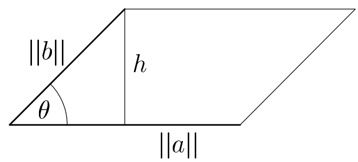
$$\det\begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) & (a, a \times b) \\ (b,a) & (b,b) & (b, a \times b) \\ (a \times b, a) & (a \times b, b) & (a \times b, a \times b) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{pmatrix} ||a \times b||^2,$$

neboť dva prvky v posledním sloupci a posledním řádku jsou podle 3) rovny nule.

5) plyne ze 4) a toho, že skalární součin se při ortogonálním zobrazení nemění.

6) Pro skalární součin platí $(a, b) = ||a|| ||b|| \cos\theta$, kde $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ je (menší) úhel mezi vektory a a b. Proto 4) dává

$$||a \times b|| = \sqrt{||a||^2||b||^2 - ||a||^2||b||^2 \cos^2\theta} = ||a|| ||b|| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = ||a|| ||b|| \sin\theta,$$



Obr. 3.2

což dokazuje požadované, neboť plocha rovnoběžníka je rovná součinu délky jedné strany (např. $||a||$) a výšky na tuto stranu, která je rovná $||b|| \sin \theta$ (viz obrázek 3.2)

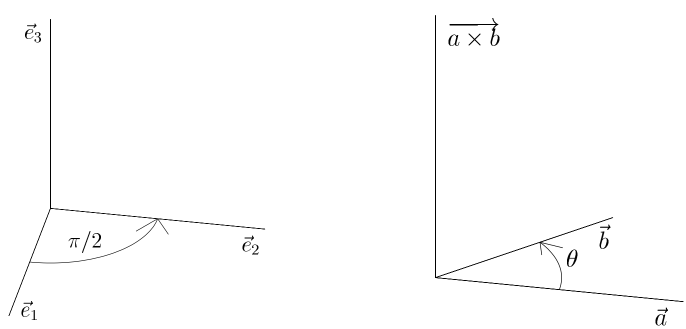
Vektorový součin $a \times b$ je tedy vektor, který má následující vlastnosti:

α) je kolmý na a i na b,

β) má délku, rovnou plošnému obsahu rovnoběžnostěnu, sestrojenému na vektorech a a b.

Jsou-li a a b lineárně nezávislé, pak existují právě dva vektory, které mají vlastnosti α) a β), a to $a \times b$ a $-(a \times b)$. Z nich právě $a \times b$ má tu vlastnost, že $\det(a, b, a \times b)(= ||a \times b||^2) > 0$. Zavedeme-li termín tzv. *kladně orientované báze* $a, b, c \in \mathbb{R}_3$ požadavkem $\det(a, b, c) > 0$, pak výše uvedené znamená, že $a, b, a \times b$ tvoří kladně orientovanou bázi v $\mathbb{R}_3$ (pokud a a b jsou lineárně nezávislé). Dalo by se ukázat, že geometricky to znamená toto:

γ) Použijeme-li v prostoru tzv. *pravotočivou bázi* , tj. kanonické bázi e_1, e_2, e_3 v $\mathbb{R}_3$ přiřadíme trojici navzájem kolmých jednotkových vektorů $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ takovou, že z vrcholu $\overrightarrow{e}_3$ vidíme pohyb od $\overrightarrow{e}_1$ k $\overrightarrow{e}_2$ po pravém úhlu <u>proti</u> ručičkám hodinovým (viz obrázek 3.3 vlevo), uvidíme z vrcholu $\overrightarrow{a \times b}$ pohyb od $\overrightarrow{a}$ k $\overrightarrow{b}$ po úhlu <u>menším</u> než π také proti hodinovým ručičkám (viz obrázek 3.3 vpravo, $\theta \in (0, \pi)$).



Obr. 3.3

(Jiná ekvivalentní charakterizace je tato: vezmeme-li <u>pravotočivý</u> vrut , který zarazíme do roviny určené vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ (jedno, z které strany) a otáčíme hlavičkou