Kapitola 10

Vlastní čísla

Vlastní čísla (dříve též nazývaná „charakteristická čísla“), podobně jako determinant, představují určitou charakteristiku matice. Poskytují o matici a o odpovídajícím lineárním zobrazení mnoho důležitých informací.

Definice 10.1 (Vlastní čísla a vlastní vektory)**.** Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný *vlastní vektor*, pokud $Ax = \lambda x$, $x \neq o$.

Zde je nutné zmínit, že $x \neq o$ je nezbytná podmínka, protože pro $x = o$ by rovnost byla triviálně splněna pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Na druhou stranu, $\lambda = 0$ klidně může nastat.

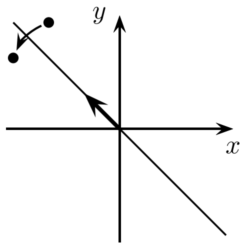
Povšimněme si dále, že vlastní vektor při daném vlastním čísle není určen jednoznačně – každý jeho nenulový násobek je také vlastním vektorem. Někdy se proto vlastní vektor normuje tak, aby $\|x\| = 1$.

Přirozeně, vlastní čísla a vektory lze definovat stejně nad jakýmkoli jiným tělesem. My zůstaneme u $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. Jak uvidíme později, komplexním číslům se nevyhneme, i když matice A je reálná.

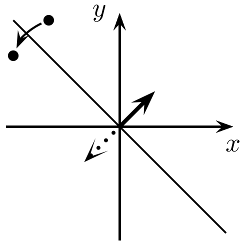
Vlastní čísla se dají zavést i obecněji. Buď V vektorový prostor a $f\colon V \to V$ lineární zobrazení. Pak λ je vlastní číslo a $x \neq o$ příslušný vlastní vektor, pokud platí $f(x) = \lambda x$. My se však vesměs budeme zabývat vlastními čísly matic, protože vzhledem k maticové reprezentaci lineárních zobrazení můžeme úlohu hledání vlastních čísel a vektorů lineárních zobrazení na konečně generovaných prostorech redukovat na matice.

Příklad 10.2 (Geometrická interpretace vlastních čísel a vektorů)**.** Vlastní vektor reprezentuje invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$, tedy směr, který se zobrazí opět na ten samý směr. Jinými slovy, je-li v vlastní vektor, pak přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se zobrazí do sebe sama. Vlastní číslo pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

- Překlopení dle přímky $y = -x$, matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

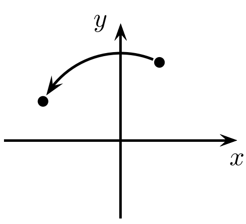


vlastní číslo 1, vlastní vektor $(-1,1)^T$,



vlastní číslo -1, vlastní vektor $(1,1)^T$.

- Rotace o úhel 90°, matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:



žádná reálná vlastní čísla.

□

Věta 10.3 (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)**.** *Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak*

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$,

(2) $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když $o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Důkaz.

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem A právě tehdy, když $Ax = \lambda I_n x$, $x \neq o$, neboli $(A - \lambda I_n)x = o$, $x \neq o$, což je ekvivalentní singularitě matice $A - \lambda I_n$, a to zase podmínce $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

(2) Analogicky, $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když $(A - \lambda I_n)x = o$, $x \neq o$, tedy x je v jádru matice $A - \lambda I_n$. □

Důsledkem věty je, že k danému vlastnímu číslu λ přísluší $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$ lineárně nezávislých vlastních vektorů.

10.1 Charakteristický polynom

Nejprve nahlédneme, že vlastní čísla trojúhelníkové matice jsou prvky na diagonále. To by nás mohlo motivovat k tomu hledat vlastní čísla obecných matic pomocí Gaussovy eliminace. Bohužel, elementární úpravy mění vlastní čísla, a tak Gaussova eliminace pro výpočet vlastních čísel není obecně použitelná.

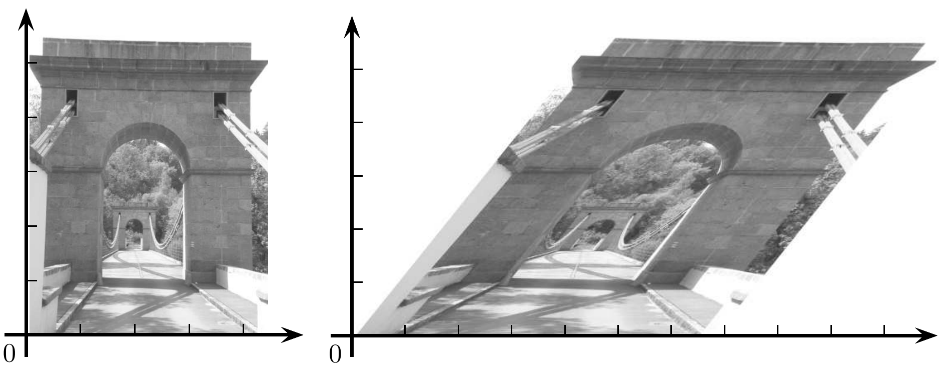
Tvrzení 10.4 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.** *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je trojúhelníková matice. Pak její vlastní čísla jsou prvky na diagonále.*

Důkaz. Matice $A - \lambda I_n$ je také trojúhelníková, a proto její determinant je roven součinu prvků na diagonále: $\det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$. Podle věty 10.3 jsou prvky $a_{11}, \dots, a_{nn}$ vlastními čísly matice A. □

Příklad 10.5.

- Jednotková matice I_n má vlastní číslo 1, které je n-násobné. Protože $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(0_n)$, množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Nulová matice 0_n má vlastní číslo 0, které je n-násobné. Množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. □

Příklad 10.6. Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Příslušné lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ geometricky představuje skosení a protáhnutí v ose x_1 o 50 %, ve směru osy x_2 nijak neprotahuje. Tuto transformaci ilustruje obrázek Stádleckého mostu dole



původní obrázek obrázek po transformaci

Vlastní čísla matice A jsou $\frac{3}{2}$ a 1, a jim příslušející vlastní vektory jsou $(1, 0)^T$ a $(-\frac{3}{2}, 1)^T$. První vlastní číslo a vektor říkají, že se obrázek protáhne o 50 % ve směru osy x_1. Druhé vlastní číslo a vektor říkají, že se obrázek ve směru vektoru $(-\frac{3}{2}, 1)^T$ nedeformuje. To se snadněji nahlédne, pokud obrázek umístíme tak, aby jeho svislá hrana byla natočena ve směru vektoru $v = (-\frac{3}{2}, 1)^T$: