1 Pravděpodobnost

1.1 Základní pojmy

Matematika je věda,
a to dokonce jedna z nejkrásnějších.

Většina jevů, s nimiž se setkáváme, má náhodný charakter. Obvykle není jisté, zda nám na návštěvu lékaře bude stačit jedna hodina času. Když rozsvítíme žárovku, není jisté, jestli se během večera nepřepálí její vlákno. Ve výčtu takových příkladů by se dalo pokračovat.

Náhodné jevy znali lidé od pradávna a využívali je zejména jako zdroj zábavy. Hrací kostky a karty mají za sebou už dlouhou historii. Vzpomeňme jen na výrok, který pronesl Gaius Iulius Caesar: „Kostky jsou vrženy."

S tím souvisí jedna z velmi starých úloh, která se ve svém jádru týká výpočtu pravděpodobnosti a nazývá se *úloha o rozdělení sázky*. Dva hráči, které označíme A a B, hrají spolu sérii partií. Předpokládejme, že v partii nemůže dojít k nerozhodnému výsledku (nebo že se prostě remízy nepočítají). Nechť hra je spravedlivá v tom smyslu, že pravděpodobnost výhry hráče A v dané partii je stejná jako pravděpodobnost výhry hráče B v téže partii. Každá z těchto pravděpodobností nechť je tedy rovna $\frac{1}{2}$. Jednotlivé partie probíhají nezávisle na sobě. Hráči hrají o určitou částku, kterou získá ten, kdo první vyhraje šest partií. (Pravidla se podobají těm, podle nichž se někdy hraje o titul mistra světa v šachu.) Hra musela být přerušena ve chvíli, kdy hráč A dosáhl 5 vítězství a hráč B dosáhl 3 vítězství. Protože se ve hře již nebude pokračovat, vznikl problém, jak rozdělit spravedlivě částku, o kterou se hrálo.

Úlohu o rozdělení sázky řešil již Fra Luca Paccioli [1445(?)–1514(?); někdy se jako rok jeho smrti udává 1509] v knize *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, která vyšla v Benátkách r. 1494. Fra Luca Paccioli byl přítelem Leonarda da Vinciho (1472–1519). Székely (1986) píše, že nedávno byl objeven italský rukopis z r. 1380, v němž už je úloha také uvedena. Dnes se má zato, že ji do Itálie přinesli Arabové. Paccioli si vůbec neuvědomil, že úloha má pravděpodobnostní charakter. Na základě jakési úvahy opírající se o formální výpočet poměru dospěl k nesprávnému výsledku, že spravedlivé rozdělení částky bude v poměru 2:1. Chybné řešení udal také Niccolo Tartaglia [1499(?)–1557] v knize *General trattato di numeri et misura*, která vyšla r. 1556. Přitom Tartaglia je znám tím, že v jednom matematickém souboji našel během noci vzorec pro řešení kubické rovnice.[1] Ke správnému řešení dospěli nezávisle na sobě a každý jiným způsobem teprve Pascal (1623–1662) a Fermat (1601–1665) v r. 1654. Odvodili překvapující výsledek, že spravedlivé je dělení částky v poměru 7:1 pro hráče A.

Uvedeme Fermatovo řešení.[2] V dané situaci už zbývá odehrát nanejvýš tři partie, aby některý z hráčů A a B celou částku vyhrál. Mysleme si, že se budou hrát ještě právě tři partie, i když ve většině případů vítěz bude znám o něco dřív. Označíme-li symbolem a vítězství hráče A a symbolem b vítězství hráče B, je následujících 8 průběhů stejně pravděpodobných:

$$\begin{array}{cccc} aaa & aba & abb & bba \\ aab & baa & bab & bbb \end{array}$$

Pouze poslední z nich přinese celkové vítězství hráči B, ve všech ostatních případech částku získá hráč A. Proto spravedlivé dělení je opravdu v poměru 7:1.

O tom, že podstata pravděpodobnostních problémů byla i pro věhlasné matematiky dost dlouho obtížná, svědčí i následující příběh. D'Alembertovi (1717–1783) byl předložen problém vypočítat pravděpodobnost, že při dvou hodech jednou mincí padne aspoň jednou líc. Odpověděl, že tato pravděpodobnost je $\frac{2}{3}$, neboť jsou tři možnosti (2× líc, 1× líc, 0× líc) a z nich jsou dvě příznivé. Toto řešení dokonce publikoval v *Encyklopedii* v r. 1754. Chybné řešení téhož problému podal i Leibnitz (1646–1716), jeden ze zakladatelů diferenciálního a integrálního počtu. Správný výsledek je přitom $\frac{3}{4}$, neboť jsou čtyři stejně pravděpodobné možnosti (líc–líc, líc–rub, rub–líc, rub–rub) a z toho jsou tři příznivé.

Dlouho trvalo, než se podařilo vybudovat vhodný matematický model náhodného pokusu. Dnes se používá převážně model, který vypracoval Kolmogorov (1903–1987).

Mějme nějaký prostor Ω, jehož prvky budeme značit symbolem ω. Různé prvky rozlišíme pomocí indexů. Prvkům ω se říká *elementární jevy* a Ω se nazývá *prostor elementárních jevů*. Jestliže chceme třeba popsat házení obyčejnou hrací kostkou, můžeme za elementární jevy považovat počty ok, která se mohou objevit na horní stěně kostky. Zkráceně to zapíšeme ve tvaru $\omega_1 = 1, \dots, \omega_6 = 6$.

Dále se předpokládá, že je dán nějaký systém $\mathcal{A}$ podmnožin prostoru Ω, který tvoří σ-algebru. To znamená, že:

(a) systém $\mathcal{A}$ je neprázdný;

[1] Řešení kubické rovnice v radikálech zřejmě jako první našel S. del Ferro kolem r. 1515, ale nepublikoval ho. Nezávisle na něm ho znovu odvodil v r. 1535 N. Fontana, jemuž se přezdívalo Tartaglia. Také on toto řešení držel v tajnosti, až ho z něj vyloudil G. Cardano a publikoval ve svém díle *Ars Magna*. Řešení rovnice 4. stupně získal L. Ferrari, který byl Cardanovým pomocníkem. Viz Rosen (1995).

[2] Viz Székely (1986), str. 11, a Bühlman (1998), str. 163. Mačák (1997) na str. 14 sice uvádí, že bylo popsáno v Pascalově dopisu Fermatovi datovaném 24. srpna 1654, ale má tím na mysli, že Pascal na příkladech komentuje a rozebírá metodu, kterou v dřívějším dopise navrhl Fermat. Poznamenejme, že korespondenci mezi Pascalem a Fermatem (s výjimkou prvního Pascalova dopisu, který se ztratil) publikoval Smith (1929) na str. 546–565.

(b) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také doplněk $A^c \in \mathcal{A}$;

(c) jestliže $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Množinám patřícím do $\mathcal{A}$ se říká *náhodné jevy* (nebo také stručně jen *jevy*). Podle *de Morganova*[3] *vzorce* platí $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$. Jsou-li A_i jevy, plyne odtud, že také $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ je jevem. Jelikož systém $\mathcal{A}$ je neprázdný, obsahuje nějaký jev A. Pak obsahuje také A^c. Dále tedy musí $\mathcal{A}$ obsahovat nemožný jev $\emptyset = A \cap A^c$ a jistý jev $\Omega = \emptyset^c$.

Pokud má prostor Ω jen konečně nebo spočetně mnoho prvků, pak se za $\mathcal{A}$ bere systém všech podmnožin prostoru Ω. Je-li Ω nespočetný prostor, obvykle $\mathcal{A}$ zahrnuje jen některé jeho podmnožiny — ne však všechny.

Nakonec se předpokládá, že na množinách $A \in \mathcal{A}$ je definována nějaká pravděpodobnostní míra P. Ta tedy splňuje následující požadavky:

(i) **nezápornost:** $\mathsf{P}(A) \geq 0$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$;

(ii) **σ-aditivita:** Jsou-li $A_1, A_2, \ldots$ disjunktní množiny patřící do $\mathcal{A}$, pak platí, že $\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$;

(iii) **normovanost:** $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Číslu $\mathsf{P}(A)$ se říká *pravděpodobnost* jevu A. Z požadavků kladených na funkci P je vidět, proč není vhodné požadovat, aby vždy třída množin $\mathcal{A}$ obsahovala všechny podmnožiny prostoru Ω. Kdyby třeba platilo $\Omega = [0, 1]$ a chtěli bychom připsat míru P každé jeho podmnožině tak, aby $\mathsf{P}([a, b]) = b - a$ pro všechna $0 \leq a < b \leq 1$, dostali bychom se do neřešitelné situace (viz Natanson 1957). Z teorie míry je známo, že je vhodné omezit se jen na σ-algebru borelovských podmnožin intervalu $[0, 1]$ — to je nejmenší σ-algebra obsahující právě všechny zmíněné intervaly $[a, b]$.

Z požadavků (i) – (iii) plynou některé jednoduché důsledky. Budiž A nějaký jev. Jevu A^c se říká *jev opačný* k jevu A. Jelikož $A \cup A^c = \Omega$ a jevy A a A^c jsou disjunktní, z (ii) a (iii) dostáváme $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$. Jelikož $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ a $\emptyset$ a Ω jsou disjunktní, dostáváme dále z (ii) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$. Na druhé straně je dobré si uvědomit, že z relace $\mathsf{P}(A) = 0$ neplyne $A = \emptyset$. Ještě poznamenejme, že disjunktním jevům se také říká *neslučitelné jevy*. Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se říká *pravděpodobnostní prostor*. To, co tento obecný model neřeší, je otázka, jak se má v konkrétním případě Ω, $\mathcal{A}$ a P zvolit, aby to odpovídalo danému experimentu. O této problematice se zmíníme v následujících odstavcích.

Dříve se pojem pravděpodobnosti zaváděl jiným způsobem. Vlastnost (ii), formulovaná jen pro konečný počet disjunktních jevů $A_1, \ldots, A_n$, tam vystupovala jako tvrzení, kterému se říkalo *věta o sčítání pravděpodobností*.

[3] De Morgan žil v létech 1806–1871.

1.2 Klasická pravděpodobnost

... dobře zamíchané karty jsou karty
dostatečně dlouho a svědomitě promíchané.

Poměrně jednoduchý případ nastává tehdy, má-li Ω jen konečně mnoho prvků a je-li z věcného rozboru situace zaručeno, že všechny tyto elementární jevy jsou stejně pravděpodobné. Je-li $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ a víme-li, že $\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = \dots = \mathsf{P}(\{\omega_n\})$, pak z vlastností (ii) a (iii) vyplývá, že $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = 1/n$ pro $i = 1, \dots, n$. Například při házení hrací kostkou můžeme mít od výrobce zaručeno, že kostka je homogenní. Z toho můžeme usoudit, že při obvyklém způsobu házení bude mít padnutí každé strany kostky stejnou pravděpodobnost, a to $1/6$. Pravděpodobnost nějakého obecného náhodného jevu vypočteme tak, že nejprve zjistíme, z kolika elementárních jevů se skládá. Tím se dostane tzv. počet *příznivých případů*. Pravděpodobnost zkoumaného jevu je vzhledem k (ii) pak rovna podílu počtu příznivých případů ku počtu všech prvků prostoru Ω. Dříve se tímto způsobem pravděpodobnost definovala, a tak dnes říkáme, že jde o tzv. *klasickou definici pravděpodobnosti*. Uvedeme několik příkladů na výpočet pravděpodobnosti tímto postupem.

Vezměme si nejběžnější hru ve *Sportce*, kdy se tipuje 6 ze 49 čísel. Vyhrát první cenu znamená uhodnout všech šest čísel. Jaká je pravděpodobnost, že se to podaří? Princip losování zaručuje, že každá šestice čísel má stejnou pravděpodobnost. Prostor Ω tedy můžeme vzít jako prostor všech šestic, které lze vytvořit ze 49 čísel. Těchto šestic je $\binom{49}{6}$. Počet příznivých jevů, tj. počet šestic, na něž připadne první cena, je roven 1. Proto pravděpodobnost výhry první ceny je rovna

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}.$$

Nyní jiný příklad. Hráč dostane 5 karet z dobře promíchané sady obyčejných 32 hracích karet. Zajímá se o pravděpodobnost, že z těchto 5 karet budou 4 esa. Z 32 karet lze 5 karet vybrat $\binom{32}{5}$ způsoby. Jsou-li karty dobře promíchány, má každá pětice stejnou pravděpodobnost. Počet pětic, které obsahují čtyři esa, je roven 28, neboť ke čtyřem esům lze přidat kteroukoli ze zbývajících 28 karet. Proto hledaná pravděpodobnost je rovna

$$\frac{28}{\binom{32}{5}} = \frac{28}{201\,376} = 0{,}000\,139.$$

Pokud dostáváte při *pokeru* čtyři esa hned napoprvé mnohem častěji než jednou za 10 000 her, pak možná nejsou karty dobře promíchány. Lze si ovšem představit i jiné důvody.

Někdy je víc možností, jak danému náhodnému pokusu přiřadit prostor elementárních jevů Ω. Pokud se to udělá správně, dostane se tím několik různých postupů vedoucích k jednomu a témuž správnému výsledku. Následující úloha svědčí o tom, že ani profesionál nemusí hned najít nejjednodušší řešení.

Ridenhour a Woodward (1984) píší, že známá firma McDonald byla sponzorem hry zvané *„Star Raiders"*. Na zakoupeném stíracím losu bylo celkem 10 políček. Dvě políčka zobrazovala výhru, která na tento los může připadnout. Výhry se pohybovaly od obyčejného hamburgeru až po stolní počítač. Jiná dvě políčka obsahovala nápis ZAP. (To je americký slangový výraz, který označuje prásknutí, příp. prásk!) Zbývajících šest políček neobsahovalo žádné symboly. Majitel losu postupně seškrabával jednotlivá políčka v tom pořadí, jaké si zvolil. Pokud se mu podařilo odkrýt oba symboly výhry dřív, než narazil na jeden z nápisů ZAP, obdržel zobrazenou výhru. V opačném případě nevyhrál nic.

Ridenhour a Woodward počítali v citovaném článku pravděpodobnost výhry následujícím způsobem. Označme M políčko s obrázkem výhry od McDonalda, Z políčko s nápisem ZAP a N políčko, kde není nic. Dvě políčka pro M se dají vybrat $\binom{10}{2}$ způsoby. Pokud jsou již políčka s M obsazena, lze políčka se Z vybrat $\binom{8}{2}$ způsoby. Tyto možnosti lze libovolně kombinovat. Proto počet způsobů, jak uspořádat symboly M, Z, N je roven

$$n = \binom{10}{2}\binom{8}{2} = 1260.$$

Losy jsou vytištěny tak, aby všechna pořadí byla stejně pravděpodobná. Vypočtěme počet těch pořadí, kde obě M jsou před oběma Z. V úvahu přicházejí následující možnosti:

1. První Z je na třetím místě. Pak M musí být na prvním a druhém místě, druhé Z může být na kterémkoli z posledních 7 míst. Počet pořadí, které takto dostaneme, je $\binom{2}{2}\binom{7}{1}$.

2. První Z je na čtvrtém místě. Obě M jsou před ním, druhé Z je na některém z posledních 6 míst. Počet takových pořadí je $\binom{3}{2}\binom{6}{1}$.

Podobně postupujeme dál. Nakonec přijdeme k situaci, že první Z je na předposledním místě. Tomu odpovídá $\binom{8}{2}\binom{1}{1}$ pořadí.

Celkový počet všech příznivých pořadí je tudíž

$$\binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{2}\binom{3}{1} + \binom{7}{2}\binom{2}{1} + \binom{8}{2}\binom{1}{1} = 210.$$

Pravděpodobnost výhry činí $P = 210/1260 = 1/6$.

V obecném případě bychom mohli uvažovat los, který má m políček s výhrou, z políček s nápisem ZAP a k políček prázdných. K výhře je nutné najít všech m