11 Maticové hry

11.1 Lineární programování

Ten, kdo místo aby myslel, počítá,
počítá často příliš složitě, nenapadne ho,
že se opírá i o zcela nadbytečné postupy.

Nejprve uvedeme motivační příklad. Jde o tzv. *nutriční problém*, kterému se také někdy říká *úloha o dietě*. Zvířata ke své obživě potřebují n druhů živin. Tyto živiny jsou obsaženy v m potravinových produktech. Je známo, že:

(i) v i-tém produktu je obsaženo a_{ij} jednotek j-té živiny ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$);

(ii) za daný časový úsek (např. za jeden den) zvířata musí dostat nejméně c_j jednotek (např. kilogramů) j-té živiny ($j = 1, \ldots, n$);

(iii) cena za jednotku (např. za 1 kg) i-tého produktu je b_i ($i = 1, \ldots, m$).

Je třeba rozhodnout, kolik jednotek kterého produktu se má zakoupit, aby byl splněn požadavek (ii) a aby přitom celková cena pořízených potravinových produktů byla co nejmenší. Označme y_i zakoupený počet jednotek i-tého produktu ($i = 1, \ldots, m$). Cena tohoto nákupu činí

$$f(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{11.1}$$

Máme-li splnit podmínku (ii), musí platit

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{11.2}$$

Ve formulaci úlohy jsou však implicitně obsažena ještě další důležitá omezení. Počet zakoupených jednotek jednotlivých druhů potravinových produktů nemůže být záporný. Proto musíme přidat podmínku

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{11.3}$$

Funkci f uvedené v (11.1) se říká *účelová funkce*. Maticový zápis uvedené vzorce poněkud zjednodušuje. Položme

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Jsou-li $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_k)'$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k)'$ dva vektory se stejným počtem složek, pak budeme psát $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}$ v případě, že $u_i \geq v_i$ pro každé $i = 1, \ldots, k$. Obdobně se používá označení $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{v}$, pokud $u_i > v_i$ pro každé $i = 1, \ldots, k$. Nutriční problém lze tedy formulovat tak, že je třeba

$$\text{minimalizovat } \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \text{ za podmínek } \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}',\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \tag{11.4}$$

Nutriční problém byl řešen v USA v r. 1944. Optimální výsledek byl možná vhodný pro zvířata, ale lidé by takový jídelníček rozhodně odmítli. Uvádí se (viz Karlin 1959), že výsledná kombinace potravinových produktů nebyla nikterak chutná.

Při řešení nutričního problému se minimalizovala cena. Jiné úlohy ekonomického charakteru vedly k maximalizaci výroby či prodeje při nutnosti dodržet určitá technologická omezení. Položíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, pak matematická formulace takového problému zněla

$$\text{maximalizovat } \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \text{ za podmínek } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \tag{11.5}$$

Matematicky jsou oba tyto typy úloh ekvivalentní. Vždyť (11.4) můžeme stejně tak dobře zapsat ve tvaru

$$\text{maximalizovat } (-\boldsymbol{b}')\boldsymbol{y} \text{ za podmínek } (-\boldsymbol{A})'\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}.$$

V obecném případě se ukázalo, že někdy není nutné, aby všechny složky vektoru $\boldsymbol{x}$ nebo $\boldsymbol{y}$ byly nezáporné. Jindy se zas stává, že některé z nerovností soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ (resp. $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}'$) musí být splněny jakožto rovnosti.

Úlohám (11.4), (11.5) a jejich zobecnění se říká *úlohy lineárního programování*. V literatuře (viz Dupačová 1982, Karlin 1959) jsou uvedeny podmínky, za nichž má taková úloha řešení. Je studován problém, kdy řešení je jednoznačné. Jsou popisovány algoritmy, jak řešení numericky najít. Nejznámější z těchto algoritmů je *simplexová metoda*.

Ukazuje se totiž, že jedno z řešení musí vždy ležet v krajním bodě množiny, která je definována podmínkami uvedenými ve vzorcích (11.4) a (11.5). Vzhledem k tomu, že tato množina je z geometrického hlediska *simplex*, který má své hrany a vrcholy, stačí dokonce prozkoumat hodnotu účelové funkce $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}$ resp. $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ jen ve vrcholech tohoto simplexu. Potíž je v tom, že při řešení reálných úloh je vrcholů simplexu tolik, že je nemůže všechny v rozumné době projít ani žádný současný výkonný počítač. Výpočetní algoritmy vycházejí z nějakého vrcholu, ale pak už přecházejí jen do některého z těch, který dá výhodnější hodnotu účelové funkce. Pro nás bude lineární programování prostě metoda, která umožňuje řešit na počítači úlohy typu (11.4) a (11.5). Budeme ji používat jako nástroj ke zvládnutí některých pravděpodobnostních a statistických problémů.

11.2 Čisté strategie

Hra je jenom tehdy spravedlivá,
když její pravidla zaručí, že se žádný hráč
neocitne ve výhodnější situaci než jeho soupeři.

Budeme se zabývat jen těmi hrami, které hrají dva hráči. Hráče nazveme A a B. Případ více hráčů je podstatně komplikovanější, už proto, že se mohou tvořit různé koalice. My se navíc omezíme na *hry s nulovým součtem*: To, co jeden hráč vyhraje, ten druhý nutně prohrává. Různé možnosti, mezi nimiž se hráči mohou rozhodovat, nazveme *strategie*. Pojednáme jen o těch hrách, kde strategií je pouze konečný počet. Řekněme, že hráč A může zvolit některou ze strategií $A_1, \ldots, A_m$ a hráč B některou ze strategií $B_1, \ldots, B_n$. Nechť a_{ij} je velikost výhry hráče A v případě, že A zvolí strategii A_i a B zvolí strategii B_j. Je-li $a_{ij} < 0$, pak částku $|a_{ij}|$ hráč A platí hráči B. Strategiím A_i a B_j se říká *čisté strategie*. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

se nazývá *matice hry* nebo také *výplatní matice*. V některých případech je struktura matice $\boldsymbol{A}$ zvlášť jednoduchá a *optimální strategie* se dají rychle najít. Ukážeme to na příkladě. Dejme tomu, že

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \tag{11.7}$$

Pokud třeba hráč A zvolí první strategii a hráč B třetí, dostane A od B výhru ve velikosti 5 jednotek. Nehleďme teď na to, že hra je zřejmě nespravedlivá vůči B, kterému nezbývá než platit a platit. Často se do takových situací dostáváme i sami — třeba daně také musí platit každý. Ale v rámci daných zákonů lze zvolit takové strategie, aby zaplacená daň byla co nejmenší.

Vraťme se však k otázce, jak najít pro každého hráče optimální rozhodnutí. Pokud A zvolí strategii A_1, může vyhrát až 7 (pokud by B zvolil strategii B_1). Ale může také vyhrát jen 1 (pokud B zvolí B_4). To, co s jistotou můžeme říci, je, že strategie A_1 zaručuje hráči A výhru minimálně 1. Podobně zjistíme, že A_2 zaručuje hráči A výhru nejméně 2, A_3 zaručuje alespoň 3 a A_4 alespoň 1. Z tohoto hlediska je nejvýhodnější strategie A_3, protože vždy zaručí výhru nejméně 3, a to žádná jiná strategie nedokáže.

Hráč B volbou B_1 riskuje, že bude platit v nejhorším případě 7. Při B_2 platí nanejvýš 3, při B_3 nanejvýš 5 a při B_4 nanejvýš 6. Nejméně tedy riskuje při B_2, a to hodnotu 3. Uvědomíme-li si, že prvky matice $\boldsymbol{A}$ s obráceným znaménkem jsou výhry hráče B, pak B_2 zaručuje hráči B maximální výhru — i když je v našem případě ohodnocena číslem -3. Proto A_3 je optimální strategie hráče A a B_2 je optimální strategie hráče B. Jednoduché řešení bylo umožněno tím, že prvek a_{32} je nejmenší ve svém řádku a největší ve svém sloupci. Říká se mu proto *sedlový prvek*.

Existuje-li sedlový prvek, může si takto každý hráč optimální strategie odvodit, a to svou i protivníkovu. Pokud zveřejní, že použije svou optimální strategii, není tato informace druhému hráči nic platná. Když se jeden z hráčů drží optimální strategie a druhý se od ní odchýlí, nezíská tím druhý hráč žádnou výhodu a může si jen pohoršit.

V případě obecné matice (11.6) řekneme, že $\boldsymbol{A}$ má sedlový prvek, platí-li

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{11.8}$$

Nechť a_{rs} je prvek, pro který platí

$$a_{rs} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Platí-li (11.8), pak a_{rs} je sedlový prvek a A_r, B_s jsou optimální strategie jednotlivých hráčů. Číslo a_{rs} se nazývá *čistá cena hry*. Pokud je čistá cena hry nulová, pak říkáme, že hra je *spravedlivá*.

Hry, které mají sedlový prvek, nebývají příliš zajímavé. U matice (11.7) si však můžeme všimnout ještě jedné důležité okolnosti. Porovná-li hráč B strategie B_1 a B_2, dojde k závěru, že bez ohledu na třetí a čtvrtý sloupec matice hry se mu nemůže nikdy vyplatit použití B_1 místo B_2, a to při libovolné strategii hráče A. Prvky prvního sloupce jsou totiž vždy nejméně tak velké jako odpovídající prvky druhého sloupce. Proto hráč B při B_1 platí vždy nejméně tolik jako při B_2. Bylo by pro něj tudíž jednoznačně nevýhodné strategii B_1 používat. Říká se, že strategie B_2 *dominuje* strategii B_1. Místo hry s maticí (11.7) stačí zkoumat *redukovanou* *matici*

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ta má menší rozměr a jakékoli další výpočty už pro ni budou snadnější. Dále si u ní všimneme, že strategie A_3 dominuje strategii A_2. Proto je možné matici znovu redukovat, tentokrát na

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{rd}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tím se opět situace zjednoduší a zpřehlední . V obecném případě však rovnost (11.8) platit nemusí. Jako protipříklad lze uvést matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.9}$$

Ta vzniká při *hře sudá — lichá*. Každý z hráčů A a B napíše na papírek nulu nebo jedničku. Je-li součet těchto čísel sudý, vyhrává jednu jednotku A. V opačném případě ji vyhrává B.

Věta 11.1 *Pro každou matici* $\boldsymbol{A}$ *platí*

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}. \tag{11.10}$$

Důkaz. Pro každé pevné i a r platí $\min_j a_{ij} \leq a_{ir} \leq \max_s a_{sr}$. Tato nerovnost platí i pro to i, pro které je levá strana maximální. Tím máme $\max_i \min_j a_{ij} \leq \max_s a_{sr}$. Zde zas konstatujeme, že tato poslední nerovnost platí pro každé r, takže i pro to, pro které je pravá strana minimální. Tím je tvrzení dokázáno. □

11.3 Smíšené strategie

Matematikové, kteří jsou zvyklí zacházet
s nesmlouvavými pravidly a s přesností, opovrhují náhodou.

Matice $\boldsymbol{A}$ uvedená v (11.9) sedlový prvek nemá, neboť platí $\max_i \min_j a_{ij} = -1$, $\min_j \max_i a_{ij} = 1$. Rovnost (11.8) neplatí, nerovnost (11.10) je ostrá. Neexistuje čistá cena hry. Kdo však někdy hrál hru sudá — lichá, ten také ví, že se užívání čisté strategie zde nevyplácí. Kdyby se třeba hráč A rozhodl, že bude používat