1. Primitivní funkce

V této kapitole si na vybraných příkladech předvedeme základní metody hledání primitivních funkcí k zadané funkci. Primitivní funkcí k funkci $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) se rozumí funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$. Je-li zadána reálná funkce f na podmnožině $\mathbb{R}$, pak úlohou o hledání všech primitivních funkcí k f rozumíme hledání všech F definovaných na nějakém otevřeném intervalu I takových, že F je primitivní funkcí k f na I. Na každém intervalu je F určena (pokud existuje) „jednoznačně až na přičtení konstantní funkce", což zde zapisujeme s použitím symbolu $\mathbf{C}$ ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathbf{C} \text{ na intervalu } I.$$

Přesněji, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zde značí množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I a $\mathbf{C}$ množinu všech konstantních funkcí na I. Symbol $F(x) + \mathbf{C}$ pak označuje množinu všech funkcí tvaru $F(x) + c$ na I, kde $c \in \mathbb{R}$. Například tedy $F(x) + \mathbf{C} = G(x) + \mathbf{C}$ na I, pokud je funkce $F - G$ konstantní na intervalu I.

Mluvíme-li o součtu $\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ či o násobku $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nenulovým reálným číslem r, užíváme konvenci, že $(F(x)+\mathbf{C}) + (G(x)+\mathbf{C}) = (F(x)+G(x))+\mathbf{C}$ a $r(F(x) + \mathbf{C}) = rF(x) + \mathbf{C}$. (Totéž bychom mohli zavést i pro nulový násobek, ale odporovalo by to běžně užívané konvenci.) Všimněte si, že provádíme příslušné operace jen na „reprezentanty" F a G. S množinami primitivních funkcí tedy pracujeme tak, jakoby to byly funkce, ale nesmíme zapomenout, že výsledek bude opět určen až na přičtení konstantní funkce.

Úloha o hledání primitivních funkcí je zřejmě vyřešena, když najdeme primitivní funkci k f na všech maximálních otevřených intervalech, na kterých existuje. Tak budeme také při řešení postupovat. Často se stručně píše například

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + \mathbf{C},$$

aniž se specifikuje interval, ke kterému se rovnost vztahuje. Přesněji se tím ovšem rozumí, že uvedený vztah platí pro všechny otevřené intervaly obsažené v definičním oboru $\frac{1}{\cos^2 x}$, tj. především na maximálních otevřených intervalech definičního oboru, kterými jsou v uvedeném případě intervaly $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

§1. Známé derivace. O řadě funkcí víme, že jsou derivací některé elementární funkce. Například $e^x = (e^x)'$, $nx^{n-1} = (x^n)'$ ap. Užijeme-li navíc znalostí o derivaci násobku a součtu funkcí, můžeme hledat primitivní funkce k některým *elementárním funkcím a jejich lineárním kombinacím.*

Příklad Spočtěte $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$, tj. najděte všechny primitivní funkce k funkci $\cos^2 \frac{x}{2}$.

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. Lepení primitivních funkcí. Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení"* primitivních funkcí.

P ř í k l a d Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

■

P ř í k l a d Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

Uvažujme funkci F definovanou přepisem $F(x) = F_k(x)$ na každém I_k. Aby funkce F byla spojitá, musí platit

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4}+k\pi)_-} (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k = \sqrt{2} + c_k =$$
$$= \lim_{x\to(-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi)_+} (-1)^{k+1}(-\cos x + \sin x) + c_{k+1} = -\sqrt{2} + c_{k+1}$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Zvolíme tedy c_0 libovolné a $c_k = c_0 + 2k\sqrt{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Tím je určena spojitá funkce F na $\mathbb{R}$. Protože derivace funkce F konverguje k hodnotě (spojité) funkce $|\sin x + \cos x|$ pro x blížící se hodnotě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ zleva i zprava pro všechna celá k, jsou podle věty o limitě derivací a jednostranných derivacích limita zleva i zprava funkce F' rovny derivaci F v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ a ta je rovna hodnotě funkce $|\sin x + \cos x|$ v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pro všechna celá k. Proto je F primitivní funkcí k $|\sin x+\cos x|$ na celém $\mathbb{R}$. Přičtením libovolné konstanty můžeme docílit, že hodnota c_0 je libovolné reálné číslo.

Řešením tedy je, že

$$\int |\sin x + \cos x| \,\mathrm{d}x = F_0(x) + \mathbf{C},$$

kde $F_0(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$ pro $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ pro všechna k celá. ■

Všimněte si, že v prvním z předchozích dvou příkladů jsme použili explicitně tvrzení o existenci primitivní funkce ke spojité funkci [I1, Věta 49], kdežto ve druhém jsme se bez toho obešli. Použili jsme ovšem jiné tvrzení (o limitě derivace a jednostranné derivaci [DII, Věta 80]). V obou případech si můžete rozmyslet, jak by vypadalo užití druhého z obou možných postupů.

§3. Derivace součinu a metoda per partes. Není příliš časté, aby funkce byla zapsána ve tvaru derivace součinu dvou funkcí jako v následujícím příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \Big((e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'\Big)\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

Mnohem častěji je možné vyjádřit si zadanou funkci jako součin derivace jedné funkce s funkcí druhou, tedy jen jako část vzorce pro derivaci součinu. To nám umožní použít *metodu per partes*, která spočívá v následujícím pozorování.

Je-li $G'(x) = g(x)$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak platí, že

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

na (a,b), pokud má pravá strana smysl.

Použití si nejprve předvedeme na velmi jednoduchém příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> *Spočtěte* $\int xe^x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Užijeme výše popsané tvrzení („metodu per partes") při volbě $F(x) = x$ a $g(x) = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = (x-1)e^x + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.$$

■

Smysl volby F a g v předchozím příkladu byl v tom, že vedla k výpočtu podstatně jednoduššího integrálu. Je třeba získat cit pro to, jak užít metodu per partes tak, aby vedla ke zjednodušení úlohy. V následujícím příkladu si ukážeme poněkud odlišný případ založený na tom, že derivace logaritmu je racionální funkce.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Maximálními otevřenými intervaly obsaženými v definičním oboru funkce $\log|1+x|$ jsou intervaly $(-1,\infty)$ a $(-\infty,-1)$.

Položme $F(x) = \log|1+x|$ a $g(x) = 1$ na libovolném z obou intervalů. Užitím metody per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x &= x\log|1+x| - \int \frac{x}{1+x} \, \mathrm{d}x = \\ &= x\log|1+x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= x\log|1+x| - x + \log|1+x| + \mathbf{C} \quad \text{na intervalu } (-\infty,-1).\end{aligned}$$

Stejnou rovnost dostáváme též na intervalu $(-1,\infty)$.

Protože $(-1,\infty)$ a $(-\infty,-1)$ jsou maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce $\log|1+x|$, jsou tak popsány všechny primitivní funkce k funkci $\log|1+x|$. ■

Povšimněte si, že nepíšeme $\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x = x\log|1+x| - x + \log|1+x| + \mathbf{C}$ na definičním oboru funkce $\log|1+x|$! Definičním oborem funkce $\log|1+x|$ není totiž interval, ale množina $(-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$. Na takovýchto množinách jsme primitivní funkci ani symbol $\mathbf{C}$ nedefinovali. Navíc, kdybychom je definovali analogicky, pak by uvedená rovnost neplatila.

Dále si ukážeme, jak může vést k nalezení primitivních funkcí vícenásobné použití metody per partes. V předminulém příkladu jsme využili mimo jiné toho, že derivací funkce x je konstantní funkce. Obecněji můžeme v řadě příkladů užít toho, že n-tá derivace polynomu n-tého stupně je konstantní. V následujícím příkladu bude podstatné zároveň, že primitivní funkce k funkcím $\cos x$ a $\sin x$ umíme počítat a použitím metody per partes se integrování postupně zjednodušuje.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int (x^3+3x-2)\cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve použijeme metodu per partes na funkce $F(x) = x^3+3x-2$ a $g(x) = \cos x$ definované na celém $\mathbb{R}$. Dostaneme, že

$$\int (x^3+3x-2)\cos x \, \mathrm{d}x = (x^3+3x-2)\sin x - \int (3x^2+3)\sin x \, \mathrm{d}x.$$

Dále užijeme metodu per partes na funkce $F(x) = 3x^2+3$ a $g(x) = \sin x$ a dostaneme, že

$$\int (3x^2+3)\sin x \, \mathrm{d}x = (3x^2+3)(-\cos x) - \int 6x(-\cos x) \, \mathrm{d}x.$$

Konečně užijeme metodu per partes s $F(x) = x$ a $g(x) = \cos x$, abychom dostali, že

$$\int x\cos x \, \mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + \mathbf{C}.$$

Celkem pak máme, že

$$\begin{aligned}
&\int (x^3+3x-2)\cos x \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad = (x^3+3x-2)\sin x + (3x^2+3)\cos x - 6(x\sin x + \cos x) + \mathbf{C} = \\
&\qquad = (x^3-3x-2)\sin x + 3(x^2-1)\cos x + \mathbf{C} \quad \text{na } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

■

Povšimněte si, jak jsme zacházeli se symbolem $+\mathbf{C}$, tj. s přičtením množiny všech konstantních funkcí na $\mathbb{R}$, a uvědomte si, proč to bylo korektní.

V některých případech není těžké odvodit pomocí opakovaného použití metody per partes vzorce matematickou indukcí.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int x^n e^x \, \mathrm{d}x$ pro všechna přirozená n.

Řešení. Položme $f_n(x) = x^n e^x$. Pomocí metody per partes dostaneme rovnost

$$\int f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n \int f_{n-1}(x) \, \mathrm{d}x$$

na celém $\mathbb{R}$. Snadno pak odhadneme a indukcí dokážeme, že

$$\int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! e^x + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.$$

■

Často vede vhodné použití metody per partes (obecně i několikrát opakované) nikoliv přímo k výpočtu primitivní funkce z jednodušší funkce, ale k rovnosti, ze které lze hledanou primitivní funkci spočítat.