11. Derivování složených funkcí

V tomto oddíle si ukážeme základní metody použití věty o derivaci složené funkce více proměnných. Začněme tím, že připomeneme znění této věty (viz [D2, Věta 189]).

Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce s proměnných, které mají v bodě $a \in \mathbb{R}^s$ totální diferenciál. Položme $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a))$. Je-li f funkce r proměnných, která má totální diferenciál v bodě b, potom funkce (s proměnných) definovaná předpisem $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ má totální diferenciál v bodě a a pro $j = 1, \dots, s$ platí $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)$.

§73. Nejjednodušším použitím je **přímá aplikace** na výpočet parciálních derivací složené funkce (případně též derivací ve směru či totálního diferenciálu).

<u>P ř í k l a d</u> Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Položme $g(x,y) = f(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace prvního řádu funkce g pomocí derivace funkce f.

Řešení. Protože f má vlastní derivaci, má i totální diferenciál v každém bodě $\mathbb{R}$. Navíc funkce x^2+y^2 má zřejmě spojité parciální derivace prvního řádu (uvědomte si, že funkce $(x,y) \mapsto 2x$ a $(x,y) \mapsto 2y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$), a tedy má totální diferenciál v každém bodě (viz §54). Proto má g totální diferenciál a platí $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(x^2+y^2) \cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = f'(x^2+y^2) \cdot 2y$ na celém $\mathbb{R}^2$. ∎

<u>P ř í k l a d</u> Nechť funkce $f = f(u,v)$ je třídy C^2 na okolí bodu $(a+b, a-b)$. Položme $g(x,y) = f(x+y, x-y)$. Vyjádřete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b)$ pomocí derivací funkce f.

Řešení. Funkce $x+y$ i $x-y$ jsou třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, mají tedy totální diferenciál v každém bodě. Funkce f má totální diferenciál na okolí bodu $(a+b, a-b)$, platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x-y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x-y) \cdot 1 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x-y) \end{aligned}$$

na okolí bodu (a,b). Dále funkce $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ mají totální diferenciál v bodě $(a+b, a-b)$ (protože mají spojité parciální derivace prvního řádu na okolí tohoto bodu), a tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a+b,a-b) + \\
+ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b) = \\
= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b).
\end{aligned}
$$

■

P ř í k l a d Nechť $f = f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a splňuje $f(1,1) = 1$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$ pomocí derivací funkce f, je-li

$$
g(t,u) = f(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}).
$$

Řešení. Funkce $(t,u) \mapsto f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle zadání, funkce $(t,u) \mapsto f(u,t)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle výše uvedené věty (aplikované pro $\varphi_1(t,u) = u$ a $\varphi_2(t,u) = t$). Tedy i funkce $f(t,u)^{f(u,t)}$ a $f(u,t)^{f(t,u)}$ mají totální diferenciál v bodě $(1,1)$ (užíváme definici obecné mocniny, podle níž $f(t,u)^{f(u,t)} = \exp(f(u,t)\log f(t,u))$ a podobně v druhém případě). Protože navíc $f(1,1)^{f(1,1)} = 1$, má podle výše uvedené věty totální diferenciál v bodě $(1,1)$ i funkce g. Navíc platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t}(1,1) = \Bigg(\frac{\partial f}{\partial t}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot f(t,u)^{f(u,t)} \cdot \\
\cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\log f(t,u) + \frac{f(u,t)}{f(t,u)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\Big) + \\
+ \frac{\partial f}{\partial u}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot \\
\cdot f(u,t)^{f(t,u)} \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\log f(u,t) + \frac{f(t,u)}{f(u,t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\Big)\Bigg)_{\substack{t=1\\u=1}} \\
= \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(1,1)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Značení použité v tomto výpočtu může být poněkud matoucí. Uvádíme ho proto, že se s takovým značením čtenář může setkat i jinde, a je tedy užitečné mu rozumět. Nejasnosti mohou vzniknout z toho, že písmena t, u se používají ve dvou různých významech. Jednak označují první a druhou proměnnou funkce f (a také g), tedy $\frac{\partial f}{\partial t}$ znamená derivace funkce f podle první proměnné, $\frac{\partial f}{\partial u}$ derivaci funkce f podle druhé proměnné. A potom označují čísla, která do výrazu dosazujeme. Takže $\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)$ označuje derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (u,t) (čili $\partial_2 f(u,t)$), nikoli derivaci výrazu $f(u,t)$ podle u (tu bychom značili $\frac{\partial}{\partial u}(f(u,t))$ a podle věty z počátku tohoto oddílu by se rovnala $\frac{\partial f}{\partial t}(u,t) = \partial_1 f(u,t)$). Pro lepší ozřejmení výpočtu ho uvedeme ještě jednou s jiným značením. Pišme $g(x,y) = f(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)})$ a počítejme

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \Bigg(& \frac{\partial f}{\partial t}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \\ & \cdot (\frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\log f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)) + \\ & + \frac{\partial f}{\partial u}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot \\ & \cdot f(y,x)^{f(x,y)} \cdot (\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\log f(y,x) + \frac{f(x,y)}{f(y,x)}\frac{\partial f}{\partial u}(y,x))\Bigg)_{\substack{x=1\\ y=1}} \\ = & (\frac{\partial f}{\partial t}(1,1))^2 + (\frac{\partial f}{\partial u}(1,1))^2.\end{aligned}$$

■

§74. Další možností je tzv. **nepřímá aplikace**. Spočívá v tom, že známé hodnoty vyjádříme pomocí neznámých, a tyto neznámé pak vypočítáme jako řešení vzniklé rovnice případně soustavy rovnic.

Příklad Nechť $u = u(x,y)$ je funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$ splňující $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

Řešení. Opět si uvědomme, že $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ znamená parciální derivaci funkce u podle první proměnné v bodě (x,x^2), tudíž uvedená rovnost znamená totéž, jako $\frac{\partial u}{\partial x}(a,a^2) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Protože funkce $(x,y) \mapsto x$ i $(x,y) \mapsto x^2$ mají všude totální diferenciál, lze derivaci funkce $\varphi(x) = u(x,x^2)$ počítat podle výše uvedené věty, tedy $\varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x$. Zároveň však víme, že funkce φ je konstantně rovna jedné, a tedy $\varphi'(x) = 0$. Platí tedy $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x = 0$. Po dosazení za $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ dostáváme $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) = -1/2$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože však u je třídy C^1, je $\frac{\partial u}{\partial y}$ spojitá, a tedy i $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -1/2$. ■

Příklad Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $(1,0)$, funkce g je definována předpisem $g(u,v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$ a $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = -1$. Spočtěte parciální derivace funkce f v bodě $(1,0)$.

Řešení. Podle věty z počátku oddílu (aplikované pro bod $a = (0,0)$ a zobrazení $\varphi(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$) platí
$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \sin v)_{u=v=0}$ a
$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot (-e^u \sin v) + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v)_{u=v=0}$.

Po dosazení dostáváme $7 = \partial_1 f(1,0)$ a $-1 = \partial_2 f(1,0)$. ■

§75. Další aplikací věty o derivaci složené funkce je tzv. **změna souřadnic**, tedy vyjádření derivací dané funkce v nových souřadnicích. Toho lze využít například pro řešení diferenciálních rovnic. Vysvětleme si nejprve, co tato změna znamená (viz též [D2, Kapitola 9, §1]).

Mějme nějakou funkci n proměnných, řekněme $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Dále mějme zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ definované na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ a definujme funkci $\tilde{f}(y) = f(\varphi(y))$. Cílem je vyjádřit parciální derivace funkce f v bodě $\varphi(y)$ pomocí parciálních derivací funkce $\tilde{f}$ v bodě y. To ovšem bude možné jen za určitých předpokladů, které shrneme v následující větě.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$, funkce f buď třídy C^1 na okolí bodu b, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nechť jsou třídy C^1 na okolí a, přičemž $\varphi(a) = b$. Dále nechť Jacobiho matice (tj. matice parciálních derivací prvního řádu) zobrazení φ v bodě a je regulární. Pak lze na nějakém okolí bodu a jednoznačně vyjádřit parciální derivace funkce f v bodě $\varphi(y)$ pomocí parciálních derivací funkce $\tilde{f}$ v bodě y.

Postupujeme tak, že s využitím věty z počátku tohoto oddílu, vyjádříme derivace funkce $\tilde{f}$ v bodě y pomocí derivací funkce f v bodě $\varphi(y)$. Tím dostaneme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(y)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(y))$. Díky předpokladu, že matice soustavy je regulární, můžeme tyto neznámé jednoznačně vyjádřit.

Uvedené podmínky umožňují parciální derivace vyjádřit lokálně, tj. v nějakém okolí zadaného bodu. Někdy lze použít globální verzi. Totiž tehdy, je-li f třídy C^1 na otevřené množině G, zobrazení φ prostě zobrazuje otevřenou množinu H na množinu G a v každém bodě H má regulární Jacobiho matici.

<u>Příklad</u> Najděte všechna řešení třídy C^1 parciální diferenciální rovnice $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$ na polorovině $\{(x,y)\colon x > 0\}$ pomocí substituce $x = u$, $y = uv$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, na jaké množině se naše změna souřadnic odehrává. Je-li totiž $G = \{(x,y)\colon x > 0\}$ a $\varphi(u,v) = (u, uv)$, pak Jacobiho matice zobrazení φ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$, a ta je regulární pro $u \neq 0$. Navíc snadno ověříme, že zobrazení φ prostě zobrazuje množinu $H = \{(u,v)\colon u > 0\}$ na G. Bude proto stačit, omezíme-li se na φ zúžené na H.

Je-li nyní f funkce třídy C^1 na G, pak definujme funkci $\tilde{f}$ předpisem $\tilde{f}(u,v) = f(u,uv)$. Funkce $\tilde{f}$ je třídy C^1 na H a pro $(u,v) \in H$ platí:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) \text{ a } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv).$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) = \frac{1}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, uv) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) - \frac{v}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v).$$

Dále, funkce f splňuje na G rovnici ze zadání, právě když $\tilde{f}$ splňuje na H rovnici:

$$u\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right) + uv \cdot \frac{1}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = u \cdot uv,$$

neboli $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = uv$. Řešení této rovnice mají zřejmě tvar $\tilde{f}(u, v) = \frac{1}{2}u^2 v + h(v)$, kde h je libovolná funkce jedné proměnné třídy C^1.

Nyní si zbývá uvědomit, že složíme-li funkci $\tilde{f}$ s inverzním zobrazením k φ (tj. dosadíme $u = x$, $v = y/x$, dostaneme řešení původní rovnice. Řešeními třídy C^1 jsou tudíž funkce tvaru $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + h(y/x)$, kde h je libovolná funkce jedné proměnné třídy C^1. ■

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy C^2, které splňují diferenciální rovnici

$$y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Použijte převod do polárních souřadnic.

Řešení. Připomeňme, že polární souřadnice se zavádí rovnostmi $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Zobrazení $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je třídy C^∞ na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ a zobrazuje ji na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

V následujícím postupu nebudeme explicitně používat více. Často se ale při používání polárních souřadnic hodí to, že jakobián Φ v bodě (r, φ) je roven r, a tedy je nenulový. Proto je Φ lokální difeomorfismus (tj. Φ je difeomorfismus na nějakém okolí každého bodu).

Nechť $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce třídy C^1. Uvažujme funkci

$$\tilde{g}(r, \varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,\\
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(-r\sin\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Odtud vyjádříme první parciální derivace

$$(*)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi)\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\sin\varphi,\\
\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi)\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\cos\varphi.
\end{aligned}$$