Kapitola 1

Základní pojmy a věty

V této kapitole připomeneme definice některých pojmů a vět z matematické a z fukcionální analýzy, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Lineární vektorové prostory, pokud nebude řečeno jinak, budou obecně komplexní a funkcionály v reálných prostorech jsou vždy reálné. Nejprve krátce pojednáme o řešitelnosti nelineárních rovnicv jedné a více proměnných, jejichž výběr přímo souvisí s teorií monotónních operátorů. V druhém odstavci se bude jednat o řešitelnost nelineární rovnice jedné reálné proměnné, ve třetím odstavci budou uvedeny věty o pevném bodu a ve čtvrtém odstavci zobecníme pojem monotonnost funkce z jedné proměnné na funkce více proměnných. Bude zde také definována koercivita a dokázáno několik tvrzení, keré zobecňují věty z prvního odstavce pro funkce více proměnných. V pátém odstavci uvedeme potřebné pojmy a jejich některé vlastnosti z diferenciálního počtu v normovaných prostorech. V šestém odstavci bude uveden stručný přehled o operátorech Němyckého typu a uvedeme základní věty týkající se minimalizace nelineárních funkcionálů. Uvedená teorie minimalizace bude využita ke studiu řešitelnosti operátorových rovnic s potenciálními operátory. Na závěr v posledním sedmém odstavci budou uvedeny definice a vlastnosti Sobolevových prostorů, a to především ty, které budou zapotřebí ve čtvrté kapitole pojednávající o slabém řešení diferenciálních okrajových úloh.

1.1 Označení, definice a základní věty

Nejprve připomeňme některé definice pojmů, se kterými se budeme setkávat. Omezíme se pouze na pojmy v normovaných lineárních prostorech. Poznamenejme, že tyto pojmy lze podobně definovat v metrických prostorech a některé také v topologických prostorech.

Definice 1.1.1

Nechť X a Y jsou lineární normované prostory a A je obecně nelineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ a s oborem hodnot $\mathcal{R}(A) \subseteq Y$.

1. *Podmnožinu $K \subset X$ nazveme kompaktní (sekvenciálně) v prostoru X, jestliže je uzavřená a z libovolné posloupnosti $\{u_n\} \subset K$ lze vybrat konvergentní podposloupnost v X.*

   Ekvivalentní definice: Podmožinu $K \subset X$ nazveme kompaktní, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

2. *Podmnožinu $K \subset X$ nazveme prekompaktní, jestliže její uzávěr je množina kompaktní v X.*

3. *Řekneme, že operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ kompaktní, jestliže její každou omezenou podmnožinu $K \subset \mathcal{D}(A)$ zobrazuje na množinu prekompaktní v prostoru Y, tzn. na množinu, jejíž uzávěr je množina kompaktní v Y.*

   Ekvivalentní definice: operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ kompaktní, jestliže z každé ohraničené posloupnosti $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ takovou, že $\{Au_{n_k}\}$ je konvergentní s limitou v Y.

4. *Řekneme, že operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ totálně spojitý, jestliže je na $\mathcal{D}(A)$ spojitý a kompaktní.*

Kvůli zjednodušení zápisu budeme symbolem $\|w\|$ označovat normu prvku $w \in X$ v normovaném prostoru X. Připomeme, že je-li operátor $A : X \to Y$ kompaktní a lineární, pak je spojitý. Množinu spojitých lineárních operátorů z normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y budeme označovat symbolem $\mathcal{L}(X, Y)$ a množinu lineárních kompaktních operátorů symbolem $Co(X, Y)$. Připomeňme, že v lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ se zavádí norma pomocí normy operátoru. Je-li prostor Y úplný, pak i prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s touto normou je úplný.

Označení: Nechť X je normovaný (obecně komplexní) lineární prostor. Pak množina všech lineárních a spojitých funkcionálů na X tvoří vektorový prostor, pro který budeme používat označení X^*, přičemž $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je duální vztah mezi oběma prostory, tzn. $\langle x^*, z \rangle$ je hodnota funkcionálu $x^* \in X^*$ v bodě $z \in X$. V některých publikacích se používá pro tento duální vztah opačné „označení“: $\langle z, x^* \rangle$, nebo $x^*(z)$. Připomeňme, že duální prostor je úplný. Prostor všech spojitých funkcionálů nad prostorem X^* - druhý normovaný duální prostor - budeme označovat symbolem X^{**}.

Definice 1.1.2 *Řekneme, že Banachův prostor X je reflexivní, jestliže obor hodnot kanonického zobrazení $J : X \to X^{**}$ (vnoření prostoru X do X^{**}) definovaného předpisem*

$$\langle Jx, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle \ \forall x^* \in X^*, x \in X,$$

je celý prostor X^{**}.

V případě reflexivního Banachova prostoru X je kanonické zobrazení J lineární, izomorfní a izometrické zobrazení prostoru X na X^{**}. Snadno lze dokázat, že je-li prostor X reflexivní, pak také jeho duál X^* je reflexivní. A naopak, je-li prostor X úplný a X^* je reflexivní, pak také prostor X je reflexivní. Připomeňme, že Hilbertův prostor je reflexivní.

Definice 1.1.3 *Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\} \in X$ konverguje slabě (X^*-slabě; posloupnost $\{u_n\}$ w-konverguje) k prvku $u \in X$, jestliže pro každé $x^* \in X^*$ platí $\langle x^*, u_n\rangle \to \langle x^*, u\rangle$. Slabou konvergenci budeme zapisovat takto: $u_n \rightharpoonup u$.*

Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\} \subset X^*$ w^*-konverguje k prvku $x^* \in X^*$ (také X-slabě), jestliže pro každé $x \in X$ platí $\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle$. Tuto slabou konvergenci funkcionálů budeme zapisovat takto: $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$.

Na prostoru X^* jsou definovány dvě slabé konvergence - w a w^* konvergence. Je-li prostor X reflexivní, pak obě slabé konvergence na X^* splývají (viz věta 3.5 v [10]). Z tohoto důvodu budeme v reflexivních prostorech používat místo w^*- konvergence pojem slabé konvergence se zápisem $x_n^* \rightharpoonup x^*$. Z principu stejnoměrné omezenosti plyne, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená. Platí následující věta známá v literatuře pod názvem Eberlainova-Šmuljanova , která charakterizuje třídu reflexivních Banachových prostorů (viz [10]).

Věta 1.1.1 *Normovaný prostor X je reflexivní právě tehdy, jestliže každá omezená posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.*

V dalším výkladu uvedeme bez důkazu některá tvrzení z lineární funkcionální analýzy, která budeme potřebovat v následujících kapitolách (viz [10], [12] a j.).

Tvrzení 1.1.1 *Platí:*

1. *Posloupnost $\{u_n\} \subset X$ konverguje slabě (X^*-slabě) k prvku $u \in X$ právě tehdy, když posloupnost $\{u_n\}$ je ohraničená a $\lim_n \langle x^*, u_n\rangle = \langle x^*, u\rangle$ pro každý spojitý lineární funkcionál x^* z nějaké husté podmnožiny M v prostoru X^*.*

2. *Jestliže posloupnost $\{u_n\}$ v Banachově prostoru X konverguje slabě k prvku u, pak*
$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\|. \tag{1.1}$$

3. *Konvexní, uzavřená podmnožina K Banachova prostoru X je slabě uzavřená , tj. platí implikace*
$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightharpoonup u \implies u \in K. \tag{1.2}$$

4. *V reflexivním Banachově prostoru každá uzavřená koule je slabě kompaktní, tzn. každá posloupnost prvků z této koule obsahuje slabě konvergentní podposloupnost s limitou v této kouli. Jinak řečeno: každá ohraničená posloupnost obsahuje slabě konvergující podposloupnost.*

5. *Nechť $\{u_n\}$ je omezená posloupnost v reflexivním Banachově prostoru X a nechť všechny slabě konvergující podposloupnosti mají za limitu (slabou) prvek u, pak celá tato posloupnost u_n konverguje slabě k prvku u.*

6. *Jestliže uzavřená koule v reflexivním Banachově prostoru leží ve sjednocení nějaké soustavy slabě otevřených množin, pak tato koule leží v nějakém konečném podsystému těchto slabě otevřených množin.*

7. *Nechť K je konvexní, ohraničená a uzavřená množina v reflexivním Banachově prostoru X, pak je tato množina slabě kompaktní.*

8. *Nechť K je neprázdná, uzavřená a konvexní množina v Hilbertově prostoru H s normou $\|\cdot\|$ a skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Pak pro libovolné $x \in H$ existuje jediný prvek $u \in K$ takový, že platí*

$$\|x-u\| = \min_{v\in K} \|x-v\|.$$

Tento prvek u lze charakterizovat takto

$$u \in K, \qquad (x-u, v-u) \le 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in K. \tag{1.3}$$

Navíc, označme $u = P_K x$, pak

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \le \|x_1 - x_2\| \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in H.$$

(P_K je projekce na množinu K).

Je-li K uzavřený lineární podprostor v prostoru H, pak P_K je lineární spojitý operátor. Prvek u lze charakterizovat takto:

$$u \in K, \qquad (x-u, v-u) = 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in K.$$

9. *(Oddělovací věta.) Nechť K je konvexní uzavřená podmnožina Banachova prostoru X. Pak pro každé $x \notin K$ existuje funkcionál $x^* \in X^*$ tak, že platí*

$$\langle x^*, x\rangle > \sup_{y\in K} \langle x^*, y\rangle\,. \tag{1.4}$$

10. *(Princip stejnoměrné omezenosti.) Nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, kde X je Banachův prostor a Y je normovaný lineární prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

    (*i*) $\sup\{\|A\| :\ A \in \mathcal{G}\} < +\infty$.

    (*ii*) $\sup\{\|Ax\| :\ A \in \mathcal{G}\} < +\infty$ *pro každé* $x \in X$.

1.1.1 Zdola a shora polospojité funkce, konvexita

V tomto odstavci uvedeme některé pojmy z teorie topologických prostorů, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Budeme definovat funkci zdola a shora polospojitou (resp. semispojitou) a větu o centrovaných systémech (viz [10] a [15]). Tato věta hraje důležitou roli důkazu surjektivity monotónních operátorů v neseparabilních, reflexivních Banachových prostorech. Nejprve uvedeme definici vlastnosti konečného průniku.

Definice 1.1.4 *Systém množin $\mathcal{F}$ má vlastnost konečného průniku, jestliže průnik libovolného konečného podsystému má neprázdný průnik.*

Věta 1.1.2 (Věta o centrovaných systémech) *Nechť $\{U_i,\ i \in I\}$ je libovolný systém uzavřených podmnožin kompaktního topologického prostoru $\mathcal{T}$ s vlastností konečného průniku. Pak je neprázdný i průnik všech množin tohoto systému, t.j.*

$$\bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset.$$

□

Definice 1.1.5 *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že funkce φ je zdola polospojitá na prostoru X, jestliže pro libovolné $x_0 \in X$ platí*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} \varphi(x)$$

a shora polospojitá na prostoru X, jestliže pro libovolné $x_0 \in X$ platí

$$\varphi(x_0) \geq \limsup_{x\to x_0} \varphi(x).$$

V případě normovaného prostoru X lze definovat pojem zdola (resp. shora) polospojité funkce na otevřené množině $U \subseteq X$ a slabě zdola (resp. shora) polospojité funkce na prostoru X. Tyto definice jsou speciálním případem definice 1.1.5, ve které topologie v U je generována normou, resp. v prostoru X slabou konvergencí v prostoru. Důkazy všech níže uvedených lemmat a vět tohoto odstavce lze najít v knihách [13], [4] a [6].

Definice 1.1.6 *Nechť X je normovaný lineární vektorový prostor a $U \subseteq X$ otevřená množina. Řekneme, že reálná funkce f (funkcionál) je zdola polospojitá na U, jestliže pro libovolné $x_0 \in U$ a každou posloupnost $\{x_n\} \subset U$, která silně (v normě) konverguje k x_0, platí*

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n),$$

resp. shora polospojitá, jestliže

$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$