Kapitola 3

Potenciální operátory

Řada výsledků týkající se řešitelnosti operátorových rovnic z druhé kapitoly byla nejprve dokázána pro potenciální úlohy. Tento pojem je převzat z terminologie popisu fyzikálních úloh. Existují úlohy, u kterých nelze bez předpokladu potenciálnosti studovat existence popř. jednoznačnost řešení.

V prvním odstavci budou popsány nutné a postačující podmínky potenciálnosti s uvedením několika příkladů. V druhém odstavci bude pojednáno o monotónních operátorech, které jsou současně potenciálními operátory. Budou dokázány základní věty o řešitelnosti operátorových rovnic s těmito typy operátorů. Dualita bude studována v třetí kapitole a v poslední kapitole bude pojednáno o některých numerických metodách řešení rovnic s potenciálními operátory. Pokud nebude řečeno jinak budeme v této kapitole předpokládat, že uvažované funkcionály jsou konečné, tzn. nabývají v každém bodě svého definičního oboru konečné hodnoty, a definiční obor studovaných operátorů bude reálný reflexivní Banachův prostor.

3.1 Definice a kritéria potenciálnosti operátoru

Definice 3.1.1 *Nechť X je reálný normovaný prostor. Řekneme, že operátor $A : X \to X^*$ je potenciální, jestliže existuje funkcionál F definovaný na prostoru X takový, že v každém bodě $x \in X$ existuje G-derivace* $\operatorname{grad} F(x)$*:* $\operatorname{grad} F(x) \equiv F'(x) : X \to X^*$ *tak, že platí* $A = \operatorname{grad} F$*, tzn.*

$$\langle Ax, y \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(x + ty) - F(x) \right) \qquad \forall x,\, y \in X.$$

Funkcionál F se nazývá potenciálem operátoru A.

Poznámka 3.1.1 Pojem potenciálního operátoru lze bezprostředně rozšířit i pro operátory $T : X \to Y$, kde prostor Y je lineárně izometricky izomorfní prostoru X^*.
Označme tento izometrický izomorfismus symbolem $I_Y \in \mathcal{L}(X^*, Y)$, a definujme operátor $A : X \to X^*$ předpisem $A = I_Y^{-1} T : X \to X^*$. Řekneme,

že operátor $T : X \to Y$ je potenciální, jestliže operátor $A : X \to X^*$ je potenciální a potenciál F operátoru A je potenciálem operátoru T. S tímto rozšířením se lze setkat v případě, kdy prvky prostoru Y reprezentují spojité lineární funkcionály z prostoru X^*.

Za výše uvedených předpokladů je pro libovolné $x, u \in X$

$$\langle Ax, u\rangle = \left\langle I_Y^{-1} Tx, u\right\rangle = \left\langle I_Y^{-1} y, u\right\rangle = a(y, u),$$

kde $y = Tx$ a $a(y, u)$ je spojitá bilineární forma na prostoru $Y \times X$,

$$|a(y, v)| \leq \|y\|_Y \, \|v\|_X .$$

Je-li operátor $A : X \to X^*$ potenciální s potenciálem F, pak

$$\langle Ax, u\rangle = \langle \operatorname{grad} F(x)\,, u\rangle = \left\langle I_Y^{-1} Tx, u\right\rangle \quad \forall x, u \in X$$

a tím

$$\operatorname{grad} F = I_Y^{-1} T \quad \Longrightarrow \quad T = I_Y \operatorname{grad} F.$$

Poznamenejme, že bilineární forma a reprezentuje obecný tvar funkcionálu x^*:

$$x^*(u) = \left\langle I_Y^{-1} y, u\right\rangle = a(y, u), \quad \text{kde} \quad y = I_Y x^* \in Y, \;\; u \in X.$$

♠

Potenciál radiálně spojitých potenciálních operátorů lze explicitně vyjádřit v integrálním tvaru.

Lemma 3.1.1 *Nechť operátor $A : X \to X^*$ je radiálně spojitý potenciální s potenciálem F. Pak pro každé $x \in X$ platí*

$$F(x) = F(0) + \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Zvolme $x \in X$ a vyšetřujme funkci $\varphi(t) = F(tx)$ pro $t \in [0, 1]$. Zřejmě

$$\varphi'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(F(tx + sx) - F(tx)\right) = \langle Atx, x\rangle .$$

Protože A je radiálně spojitý, je funkce $\langle Atx, x\rangle = \varphi'(t)$ spojitá na intervalu $[0, 1]$ a odtud dostaneme

$$F(x) - F(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t.$$

□

Z tohoto lemmatu plyne, že potenciál radiálně spojitých potenciálních operátorů je určen až na konstantu jednoznačně.

V následujícím lemmatu budou uvedeny kritéria potenciálnosti operátoru.

Lemma 3.1.2 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a operátor A, $A : X \to X^*$ je demispojitý. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

a) Operátor A je potenciální.

b) Pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), x - y\rangle \,\mathrm{d}t.$$

c) Pro libovolné x, y a libovolné spojitě diferencovatelné zobrazení u, $u : [0,1] \to X$, takové, že $u(0) = x$ a $u(1) = y$ platí

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Au(t), u'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. *Implikace a) $\Rightarrow$ b):* Podle lemmatu 2.1.2 je demispojitý operátor radiálně spojitý a podle lemmatu 3.1.1 je pro libovolné $x, y \in X$

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = F(x) - F(y) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} F(y + t(x-y)) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), x - y\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Implikace b) $\Rightarrow$ c): Z demispojitosti operátoru A plyne existence konstanty $M > 0$ tak, že pro každé $\tau, t, s \in [0,1]$ platí

$$\|A\,(u(s) + \tau(u(t) - u(s)))\,\| \le M.$$

Skutečně, nechť taková konstanta neexistuje. Pak existuje posloupnost čísel t_n, τ_n, $s_n \in [0,1]$ tak, že množina $\|A\,(u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)))\,\|$ není ohraničená. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $t_n \to t$, $\tau_n \to \tau$, $s_n \to s$. Pak ze spojitosti funkce $u : [0,1] \to X$ obdržíme

$$u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)) \to u(s) + \tau(u(t) - u(s)) \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Avšak A je demispojitý a tím posloupnost $\{A\,(u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)))\}$ konverguje slabě. Avšak každá slabě konvergentní posloupnost je v prostoru X^* ohraničená (prostor X je reflexivní), což je ve sporu s předpokladem.

Na intervalu $[0,1]$ vyšetřujme reálnou funkci φ:

$$\varphi(t) = \int_0^1 \langle A\tau u(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}\tau.$$

Z předpokladu v b) obdržíme pro $t, s \in [0,1]$

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \left| \int_0^1 \langle A\tau u(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 \langle A\tau u(s), u(s)\rangle \,\mathrm{d}\tau \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \langle A(u(s) + \tau(u(t) - u(s))), u(t) - u(s)\rangle \,\mathrm{d}\tau \right| \le M\|u(t) - u(s)\| \le$$

$$\le M|t - s| \max_{\tau\in[0,1]} \|u'(\tau)\|,$$

což znamená, že funkce φ je Lipschitzovsky spojitá a tím je absolutně spojitá. Tudíž

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \, \mathrm{d}t = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Z věty o střední hodnotě obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{s\to t} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} = \\ &= \lim_{s\to t} \left\langle A(u(t)+\tau_0(u(s)-u(t))), \frac{u(s)-u(t)}{s-t} \right\rangle = \langle Au(t), u'(t)\rangle \end{aligned}$$

a tím odtud a z rovnosti (3.1) plyne tvrzení c).

Implikace c) $\Rightarrow$ a): Dokážeme, že funkcionál F,

$$F(x) = \int_0^1 \langle Asx, x\rangle \, \mathrm{d}s,$$

je potenciál operátoru A. Položme $u_t(s) = x + sty$. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$, $x, t \in X$ a odpovídající hodnoty $s_0 \in [0,1]$ (z věty o střední hodnotě) obdržíme

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^1 \langle As(x+ty), x+ty\rangle \, \mathrm{d}s - \int_0^1 \langle Asx, x\rangle \, \mathrm{d}s \right) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \langle Au_t(s), u_t'(s)\rangle \, \mathrm{d}s = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \langle Au_t(s), ty\rangle \, \mathrm{d}s = \\ &= \lim_{t\to 0} \langle A(x+s_0ty), y\rangle = \langle Ax, y\rangle . \end{aligned}$$

□

Cvičení 3.1.1 Dokažte ekvivalentnost v tvrzení a) a b) v lemmatu 3.1.2 za předpokladu, že operátor $A: X \to X^*$ je radiálně spojitý.

♣

Poznámka 3.1.2 Jestliže jsou splněny předpoklady v lemmatu 3.1.2, pak operátor $A: X \to X^*$ je potenciální, právě když pro každé spojitě diferencovatelné zobrazení $u: [0,1] \to X$ takové, že $u(0) = u(1)$ platí

$$\int_0^t \langle Au(\tau), u'(\tau)\rangle \, \mathrm{d}\tau = 0.$$

V případě, kdy operátor $A: X \to X^*$ je G-diferencovatelný, lze k ověření potenciálnosti využít následující ekvivalence.

Lemma 3.1.3 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a operátor A, $A : X \to X^*$ má v každém bodě $x \in X$ G-derivaci $A'(x)$ takovou, že pro všechna $x, y, h \in X$ je funkce ψ,*

$$\psi(s,t) = \langle A'(h+sx+ty)x, y\rangle \,,$$

spojitá na množině $[0,1] \times [0,1]$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Operátor A je potenciální.

b) Pro všechna $x, y, h \in X$ platí

$$\langle A'(h)x, y\rangle = \langle A'(h)y, x\rangle \,.$$

Důkaz. *Implikace a) $\Rightarrow$ b):*
Nechť operátor A je potenciální s potenciálem F. Definujme funkci $\varphi_{h,x,y}(t)$ předpisem:

$$\varphi_{h,x,y}(t) := [F(h+tx+ty) - F(h+tx)] - [F(h+ty) - F(h)].$$

Pomocí lemmat 3.1.1 a 3.1.2 obdržíme

$$\begin{aligned} &F(h+tx+ty) - F(h+tx) = \\ &= \int_0^1 \langle A\tau(h+tx+ty), h+tx+ty\rangle \,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 \langle A\tau(h+tx), h+tx\rangle \,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^1 \langle A(h+tx+\tau ty), ty\rangle \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle A(h+tx+s_1y), y\rangle \,\mathrm{d}s_1 \end{aligned}$$

a podobně

$$F(h+ty) - F(h) = \int_0^t \langle A(h+s_1y), y\rangle \,\mathrm{d}s_1.$$

Odtud dostaneme

$$\varphi_{h,x,y}(t) = \int_0^t \langle A(h+tx+s_1y) - A(h+s_1y), y\rangle \,\mathrm{d}s_1.$$

Taylorova formule se zbytkem v integrálním tvaru (viz např. [13]) má tvar

$$\langle A(u+v) - Av, y\rangle = \int_0^1 \langle A'(v+\tau v))v, y\rangle \,\mathrm{d}\tau,$$

kde $u, v, y \in X$. Použitím této formule po úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} &\langle A(h+tx+s_1y) - A(h+s_1y), y\rangle = \int_0^1 \langle A'(h+s_1y+\tau tx)tx, y\rangle \,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^t \langle A'(h+s_1y+s_2x)x, y\rangle \,\mathrm{d}s_2 \end{aligned}$$