Kapitola 2

Kinematika

Příklad 2.1. Ukažte, že skalární součin čtyřvektorů

$$P_1 \cdot P_2 \equiv E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \tag{2.1}$$

je Lorentz-invariantní.

Řešení: Použitím vztahů pro Lorentzovu transformaci (A:2.8a)–(A:2.8c) dostáváme

$$\begin{aligned}
P_1' \cdot P_2' &= E_1' E_2' - \vec{p}_1{}' \cdot \vec{p}_2{}' = E_1' E_2' - p_{1,\parallel}' p_{2,\parallel}' - p_{1,\perp}' p_{2,\perp}' = \\
&= \gamma^2 \left(E_1 + \beta p_{1,\parallel}\right)\left(E_2 + \beta p_{2,\parallel}\right) - \gamma^2 \left(p_{1,\parallel} + \beta E_1\right)\left(p_{2,\parallel} + \beta E_2\right) - p_{1,\perp} p_{2,\perp} = \\
&= \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right)\left(E_1 E_2 - p_{1,\parallel} p_{2,\parallel}\right) - p_{1,\perp} p_{2,\perp} = P_1 \cdot P_2
\end{aligned}$$

Příklad 2.2. Ukažte, že při zanedbání hmot částic v interakci $2 \to 2$ platí mezi Mandelstamovými invarianty relace

$$t = -s\,\frac{1 - \cos\theta}{2} \tag{2.2a}$$

$$u = -s\,\frac{1 + \cos\theta}{2}, \tag{2.2b}$$

kde θ je úhel výletu koncových částic v CMS vůči ose nalétávajících částic.

Řešení: V těžišťové soustavě platí $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ a $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$. Při zanedbání hmot částic dále platí $E_i = p_i$, ze zákona zachování energie $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ pak vyplývá

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4. \tag{2.3}$$

Nyní vypočítáme jednotlivé Mandelstamovy invarianty:

$$s \equiv \left(P_1 + P_2\right)^2 = \left(p_1 + p_2\right)^2 = 4p_1^2 \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned}
t &\equiv \left(P_1 - P_3\right)^2 = \left(p_1 - p_3\right)^2 - \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_3\right)^2 = -2p_1 p_3 \left(1 - \cos\theta\right) = \\
&= -2p_1^2 \left(1 - \cos\theta\right)
\end{aligned} \tag{2.4b}$$

$$\begin{aligned}
u &\equiv \left(P_1 - P_4\right)^2 = \left(p_1 - p_4\right)^2 - \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_4\right)^2 = -2p_1 p_4 \left(1 - \cos(\pi - \theta)\right) = \\
&= -2p_1^2 \left(1 + \cos\theta\right),
\end{aligned} \tag{2.4c}$$

přičemž úhel θ je podle zadání úhel mezi vektory $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_3$. Důkaz je tedy hotov.

Příklad 2.3. Uvažujte pružný rozptyl

$$\mathrm{n} + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{p}, \tag{2.5}$$

kde proton v počátečním stavu je v klidu. Jaká je maximální hybnost odraženého protonu v závislosti na celkové energii nalétávajícího neutronu E_n?

Řešení: Proton bude mít maximální energii, bude-li odražen ve směru nalétávajícího neutronu. Zákony zachování energie a hybnosti zde mají podobu:

$$E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p} = E'_\mathrm{p} + E'_\mathrm{n} \tag{2.6a}$$

$$p_\mathrm{n} = p'_\mathrm{p} + p'_\mathrm{n} \tag{2.6b}$$

Úpravou dostaneme rovnici pro hybnost odraženého protonu

$${p'_\mathrm{p}}^2\left(p_\mathrm{n}^2 - (E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p})^2\right) + 2p'_\mathrm{p} p_\mathrm{n} m_\mathrm{p}(E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p}) = 0$$

První řešení $p'_\mathrm{p} = 0$ odpovídá situaci, kdy ke srážce částic vůbec nedojde a proton tak zůstane v klidu. Druhé řešení

$$p'_\mathrm{p} = \frac{2m_\mathrm{p}(E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p})\sqrt{E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2}}{m_\mathrm{p}^2 + m_\mathrm{n}^2 + 2E_\mathrm{n} m_\mathrm{p}} \tag{2.7}$$

odpovídá hledané maximální energii a hybnosti protonu.

Uvedený vztah je odvozen pro relativistické případy. V nerelativistické limitě ($p_\mathrm{n} \ll m_\mathrm{n}$) přejde vztah (2.7) na jednoduchý tvar

$$p'_\mathrm{p} = p_\mathrm{n} \frac{2m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{n} + m_\mathrm{p}} \tag{2.8}$$

Pokud by $m_\mathrm{p} = m_\mathrm{n}$, jednalo by se o analogii čelní srážky kulečníkových koulí, kdy se nalétávající koule zcela zastaví a předá celou svoji hybnost kouli druhé.

Příklad 2.4. Určete maximální energii elektronu E_e v β-rozpadu volného neutronu

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{2.9}$$

Řešení: Na tříčásticový rozpad můžeme nahlížet jako na dva po sobě jdoucí dvoučásticové rozpady

$$\mathrm{n} \to \mathrm{e}^- + (\mathrm{p}\bar{\nu}_\mathrm{e})\,, \quad (\mathrm{p}\bar{\nu}_\mathrm{e}) \to \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}, \tag{2.10}$$

kde pro energii elektronu platí podle vztahu (A:2.10a)

$$E_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{n}}{2} + \frac{m_\mathrm{e}^2 - m^2(\mathrm{p}\bar{\nu}_\mathrm{e})}{2m_\mathrm{n}} \tag{2.11}$$

Elektron bude mít maximální energii v případě, že invariantní hmota dvojice $(\mathrm{p}\bar{\nu}_\mathrm{e})$ bude co nejmenší. Platí

$$m^{\min}(\mathrm{p}\bar{\nu}_\mathrm{e}) = m_\mathrm{p} + m_\nu \tag{2.12}$$

S použitím posledních dvou vztahů tak dostaneme řešení

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{n}}^2 - (m_{\mathrm{p}} + m_\nu)^2 + m_{\mathrm{e}}^2}{2m_{\mathrm{n}}} \tag{2.13}$$

Pro běžné účely můžeme hmotu antineutrina obvykle zanedbat, čímž se výsledek (2.13) ještě zjednoduší. Na druhou stranu se přesné určení maximální energie elektronu používá právě k určení hmoty elektronového antineutrina, resp. horní hranice jeho hmoty, viz kapitolka A:10.1.

Příklad 2.5. Ukažte, že pro součet Mandelstamových invariantů daných vztahy

$$s \equiv (P_1 + P_2)^2 \tag{2.14a}$$

$$t \equiv (P_1 - P_3)^2 \tag{2.14b}$$

$$u \equiv (P_1 - P_4)^2 \tag{2.14c}$$

platí

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_{\mathrm{i}}^2 \tag{2.15}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (P_1 + P_2)^2 + (P_1 - P_3)^2 + (P_1 - P_4)^2 = \\ &= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_1^2 + P_3^2 - 2P_1 \cdot P_3 + P_1^2 + P_4^2 - 2P_1 \cdot P_4 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2P_1 \cdot (P_2 - P_3 - P_4) = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2P_1^2 = \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili identitu

$$-P_1 = P_2 - P_3 - P_4$$

plynoucí ze zákona zachování čtyřhybnosti. Jsou-li energie částic mnohem vyšší než jejich hmoty, platí přibližně

$$s + t + u \simeq 0.$$

Příklad 2.6. Určete prahovou kinetickou energii T nalétávajícího protonu, při které probíhá reakce

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^0 \tag{2.16}$$

Terčíkový proton je v laboratorním systému v klidu.

Řešení: S výhodou využijeme invariance Mandelstamovy proměnné s. Kvadrát celkové energie vyjádříme v počátečním stavu pomocí proměnných laboratorního systému, v koncovém stavu pak pomocí těžišťového systému. V těžišťovém systému jsou totiž při prahové energii reakce všechny částice v klidu. Dostáváme tedy:

$$\left(T + 2m_{\mathrm{p}}, \sqrt{(T + m_{\mathrm{p}})^2 - m_{\mathrm{p}}^2}\right)^2 = (2m_{\mathrm{p}} + m_{\pi^0}, 0)^2 \tag{2.17}$$

Úpravou dostáváme

$$(T + 2m_\mathrm{p})^2 - (T + m_\mathrm{p})^2 + m_\mathrm{p}^2 = (2m_\mathrm{p} + m_{\pi^0})^2$$
$$T = 2m_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{2m_\mathrm{p}} \approx 280\ \mathrm{MeV}$$

Vzhledem k tomu, že $m_{\pi^0} << m_\mathrm{p}$, je v prvním přiblížení $T \approx 2m_{\pi^0}$.

Na tomto příkladě si uvědomme, že část kinetické energie nalétávajícího protonu se spotřebuje na kinetickou energii pohybu těžiště soustavy koncového stavu, proto musí být $T > m_{\pi^0}$.

Příklad 2.7. Určete maximální energii elektronu z příkladu 2.4 pomocí algebry čtyřhybností.

Řešení: Ukažme nejprve, že pro libovolné čtyřhybnosti P_1, P_2 platí

$$(P_1 + P_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \tag{2.18}$$

Levá strana představuje Mandelstamův invariant s. Pravá strana odpovídá s v situaci, kdy jsou v této soustavě částice $1, 2$ v klidu, což odpovídá minimální celkové těžišťové energii. Tím je vlastně nerovnost (2.18) dokázána. Podotkněme, že platí obecně i pro více částic.

Nerovnost (2.18) lze dokázat i algebraicky. Po roznásobení a odečtení stejných členů zbývá ukázat platnost vztahu

$$E_1E_2 - p_1p_2 \geq m_1m_2$$

Vyjádříme-li hybnosti pomocí relativistických vztahů (viz rovnice (A:1.1)), dostaneme po umocnění relaci

$$(E_1m_2 - E_2m_1)^2 \geq 0,$$

která je splněna vždy.

Relaci (2.18) nyní použijeme k nalezení maximální energie elektronu:

$$(P_\mathrm{n} - P_\mathrm{e})^2 = (P_\mathrm{p} + P_{\bar{\nu}})^2 \geq (m_\mathrm{p} + m_\nu)^2$$
$$m_\mathrm{n}^2 - 2P_\mathrm{n} \cdot P_\mathrm{e} + m_\mathrm{e}^2 \geq (m_\mathrm{p} + m_\nu)^2$$
$$E_\mathrm{e} \leq \frac{m_\mathrm{n}^2 - (m_\mathrm{p} + m_\nu)^2 + m_\mathrm{e}^2}{2m_\mathrm{n}} \tag{2.19}$$

Rovnost odpovídá maximální energii elektronu. Samozřejmě jsme dostali stejný výsledek jako v příkladu 2.4, viz relace (2.13).

Příklad 2.8. Určete maximální hybnost protonu z příkladu 2.3 tak, že nejprve spočítáte hybnost p_cms rozptýlených částic p, n v těžišťovém systému a pak aplikujete Lorentzovu transformaci.

Řešení: Pro výpočet p_cms využijeme opět Mandelstamovy proměnné s vyjádřené v laboratorním (počáteční stav) a těžišťovém systému (koncový stav):

$$\left(E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p}, \sqrt{E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2}\right)^2 = \left(\sqrt{p_\mathrm{cms}^2 + m_\mathrm{p}^2} + \sqrt{p_\mathrm{cms}^2 + m_\mathrm{n}^2}, 0\right)^2 \tag{2.20}$$

Podle definice (2.1) dostáváme tedy rovnici

$$(E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p})^2 - \left(E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2\right) = \left(\sqrt{p_\mathrm{cms}^2 + m_\mathrm{p}^2} + \sqrt{p_\mathrm{cms}^2 + m_\mathrm{n}^2}\right)^2 \tag{2.21}$$

Řešením uvedené rovnice je

$$p_\mathrm{cms} = m_\mathrm{p}\sqrt{\frac{E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2}{m_\mathrm{n}^2 + m_\mathrm{p}^2 + 2E_\mathrm{n}m_\mathrm{p}}} \tag{2.22}$$

Těžiště se však vůči laboratorní soustavě pohybuje rychlostí

$$\beta = \frac{|\sum \vec{p}|}{\sum E} = \frac{\sqrt{E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2}}{E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p}}, \tag{2.23a}$$

odkud určíme i Lorentzův faktor

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \frac{E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p}}{\sqrt{m_\mathrm{n}^2 + m_\mathrm{p}^2 + 2E_\mathrm{n}m_\mathrm{p}}} \tag{2.23b}$$

Rozptýlený proton bude mít maximální hybnost p'_p tehdy, pokud se p_cms složí v přímce spolu s rychlostí β těžiště. Podle vztahu (A:2.6) tedy

$$p'_\mathrm{p} = \gamma p_\mathrm{cms} + \gamma\beta\sqrt{p_\mathrm{cms}^2 + m_\mathrm{p}^2} = \frac{2m_\mathrm{p}(E_\mathrm{n} + m_\mathrm{p})\sqrt{E_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{n}^2}}{m_\mathrm{p}^2 + m_\mathrm{n}^2 + 2E_\mathrm{n}m_\mathrm{p}}$$

Výsledný vztah je samozřejmě stejný jako řešení příkladu 2.3.

Poznámka: relativistický faktor γ (viz vztah (2.23b)) jsme určili z definice (A:2.7) Jak je vidět, pro soustavu více částic je obdobou vztahu $\gamma = E/m$ pro jednu částici obecnější relace

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{\sum \vec{p}_i}{\sum E_i}\right)^2}} = \frac{\sum E_i}{\sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}} = \frac{\sum E_i}{\sqrt{s}}, \tag{2.24}$$

kde $\sqrt{s}$ hraje roli invariantní hmoty soustavy více částic. Pro jednu částici se tento vztah redukuje díky $s = P^2 = m^2$ na již zmíněnou známou relaci.

Příklad 2.9. Částice π^0 s celkovou energií 10 GeV se za letu rozpadá

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

Určete minimální a maximální úhel, který spolu svírají vylétající fotony v laboratorním systému v závislosti na úhlu výletu γ vůči směru pohybu π^0.

Řešení: Fotony z rozpadu π^0 svírají minimální úhel v případě, že v těžišťovém systému vyletí kolmo ke směru pohybu π^0, viz obr. 2.1. Pro složky hybnosti fotonů v laboratorní soustavě platí podle vztahů pro Lorentzovu transformaci (A:2.8a)–(A:2.8c)

$$p_{\gamma,\parallel} = \gamma p^*_{\gamma,\parallel} + \gamma\beta E^*_\gamma = \gamma\beta\frac{m_{\pi^0}}{2} \tag{2.25a}$$

$$p_{\gamma,\perp} = p^*_{\gamma,\perp} = p^*_\gamma = \frac{m_{\pi^0}}{2}\,. \tag{2.25b}$$