Kapitola 11

Systémy neutrálních mezonů K, D, B

Příklad 11.1. Ukažte, že v případě zachování CP mají stavy K_L^0, K_S^0 ostře definovanou hodnotu kombinované parity.

Řešení: V případě zachování CP jsou stavy $|\mathrm{K}_\mathrm{L}^0\rangle$, $|\mathrm{K}_\mathrm{S}^0\rangle$ totožné se stavy $|\mathrm{K}_{-1}^0\rangle$, $|\mathrm{K}_{+1}^0\rangle$. Důkaz provedeme přímo použitím definičních vztahů (A:11.19a), (A:11.19b):

$$\hat{C}\hat{P}|\mathrm{K}_{-1}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{C}\hat{P}\left(-|\mathrm{K}^0\rangle + |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle + |\mathrm{K}^0\rangle) = -|\mathrm{K}_{-1}^0\rangle$$
$$\hat{C}\hat{P}|\mathrm{K}_{+1}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{C}\hat{P}\left(|\mathrm{K}^0\rangle + |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle + |\mathrm{K}^0\rangle\right) = |\mathrm{K}_{+1}^0\rangle$$

Příklad 11.2. Ukažte, že v případě zachování CP-parity jsou parciální rozpadové šířky K^0 a $\bar{\mathrm{K}}^0$ do daného stavu stejné.

Řešení: Pro parciální šířku rozpadu $\mathrm{K}^0 \to f$ platí

$$\Gamma_f = \frac{1}{2M}\left|\langle f|\hat{H}_w|\mathrm{K}^0\rangle\right|^2 \Phi_f \tag{11.1}$$

Při zachování CP je hamiltonián slabé interakce $\hat{H}_w$ invariantní vůči působení operátoru $\hat{C}\hat{P}$:

$$\left(\hat{C}\hat{P}\right)^{-1}\hat{H}_w\left(\hat{C}\hat{P}\right) = \hat{H}_w \tag{11.2}$$

Zapůsobením operátoru $\hat{C}\hat{P}$ dostaneme výraz

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|\left(\hat{C}\hat{P}\right)^{-1}\hat{H}_w\left(\hat{C}\hat{P}\right)|f\rangle\langle f|\left(\hat{C}\hat{P}\right)^{-1}\hat{H}_w\left(\hat{C}\hat{P}\right)|\mathrm{K}^0\rangle\Phi_f = \\ &= \frac{1}{2M}\langle\bar{\mathrm{K}}^0|\hat{H}_w|\bar{f}\rangle\langle\bar{f}|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_f = \Gamma_{\bar{f}},\end{aligned} \tag{11.3}$$

kde $\Gamma_{\bar{f}}$ je parciální šířka rozpadu $\bar{\mathrm{K}}^0 \to \bar{f}$.

Příklad 11.3. Určete parametry Γ, γ rozpadové matice ve vztahu

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} k_\mathrm{L}(t) \\ \\ k_\mathrm{S}(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} M-m & 0 \\ \\ 0 & M+m \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma-\gamma & 0 \\ \\ 0 & \Gamma+\gamma \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} k_\mathrm{L}(t) \\ \\ k_\mathrm{S}(t) \end{pmatrix}, \tag{11.4}$$

znáte-li střední doby života mezonů $\mathrm{K_S^0}$ a $\mathrm{K_L^0}$.

Řešení: Rozpadová šířka Γ souvisí se střední dobou života $c\tau$ vztahem:

$$\Gamma_\mathrm{S,L} = \frac{\hbar c}{c\tau_\mathrm{S,L}} \tag{11.5}$$

Z rovnice (11.4) vyplývají vztahy pro rozpadové šířky obou mezonů, po dosazení tedy dostáváme hledané hodnoty parametrů

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\Gamma_\mathrm{S} + \Gamma_\mathrm{L}\right) = 3{,}682 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\Gamma_\mathrm{S} - \Gamma_\mathrm{L}\right) = 3{,}669 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$$

Příklad 11.4. Ukažte, že pro piony pocházející z rozpadu neutrálních K-mezonů platí $CP(2\pi) = +1$, $CP(3\pi) \approx -1$.

Řešení: Všechny zmíněné mezony mají nulový spin, proto v rozpadu $\mathrm{K} \to 2\pi$ musí být orbitální moment $L = 0$. Zatímco pro paritu finálního stavu platí

$$P = (-1)^2 \times (-1)^L = 1,$$

nábojová parita je podle vztahu (8.17)

$$C = (-1)^{L+S} = (-1)^{0+0} = +1,$$

a tedy kombinovaná parita $CP(2\pi) = +1$.

Situace v rozpadu $\mathrm{K} \to 3\pi$ je trochu složitější. Označme L vzájemný orbitální moment dvou pionů a l orbitální moment třetího pionu vzhledem ke zmíněné dvojici pionů. Parita takového systému bude vždy

$$P = (-1)^3 \times (-1)^{L+l} = -1,$$

neboť $\vec{L} + \vec{l} = \vec{S}_\mathrm{K} = \vec{0}$ a tedy $L = l$. Jsou-li ve finálním stavu tři neutrální piony, které jsou vlastním stavem nábojové parity ($C(\pi^0) = +1$), je $C(3\pi^0) = +1$, a tedy $CP(3\pi^0) = -1$. V případě finálního stavu $\pi^+\pi^-\pi^0$ je jeho nábojová parita

$$C(\pi^+\pi^-\pi^0) = C(\pi^+\pi^-)C(\pi^0) = (-1)^L \times 1 = (-1)^L$$

Stav s $L = 0$ bude dominovat, neboť stavy s $L > 0$ budou potlačeny díky odstředivé bariéře. Dostáváme tedy $CP(\pi^+\pi^-\pi^0) \approx -1$, přičemž rovnost platí pro $L = 0$. Celkem tedy také platí $CP(3\pi) \approx -1$.

Příklad 11.5. Za předpokladu zachování CP (a CPT) symetrie u K-mezonů určete vzájemné vztahy mezi diagonálním (Γ) a nediagonálním prvkem (γ) rozpadové matice v rozpadu na dva, resp. tři piony.

Řešení: Členy na hlavní diagonále jsou stejné díky CPT symetrii:

$$\begin{aligned}\Gamma_{2\pi} &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|\hat{H}_w|2\pi\rangle\langle 2\pi|\hat{H}_w|\mathrm{K}^0\rangle\Phi_{2\pi} \stackrel{CPT}{=} \\ &\stackrel{CPT}{=} \frac{1}{2M}\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\hat{H}_w|2\pi\rangle\langle 2\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{2\pi} \qquad (11.6a)\\ \Gamma_{3\pi} &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|\hat{H}_w|3\pi\rangle\langle 3\pi|\hat{H}_w|\mathrm{K}^0\rangle\Phi_{3\pi} \stackrel{CPT}{=} \\ &\stackrel{CPT}{=} \frac{1}{2M}\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\hat{H}_w|3\pi\rangle\langle 3\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{3\pi} \qquad (11.6b)\end{aligned}$$

Pro vyjádření nediagonálních členů využijeme CP symetrii, konkrétně vztah (A:11.5) a CP-paritu dvojice, resp. trojice pionů (viz příklad 11.4):

$$\begin{aligned}\gamma_{2\pi} &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|\hat{H}_w|2\pi\rangle\langle 2\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|(\hat{C}\hat{P})^{-1}\hat{H}_w(\hat{C}\hat{P})|2\pi\rangle\langle 2\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{2\pi} = \\ &= +\frac{1}{2M}\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\hat{H}_w|2\pi\rangle\langle 2\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{2\pi} = \Gamma_{2\pi} \qquad (11.7a)\\ \gamma_{3\pi} &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|\hat{H}_w|3\pi\rangle\langle 3\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{3\pi} = \\ &= \frac{1}{2M}\langle \mathrm{K}^0|(\hat{C}\hat{P})^{-1}\hat{H}_w(\hat{C}\hat{P})|3\pi\rangle\langle 3\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{3\pi} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2M}\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\hat{H}_w|3\pi\rangle\langle 3\pi|\hat{H}_w|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\Phi_{3\pi} = -\Gamma_{3\pi} \qquad (11.7b)\end{aligned}$$

Vyjádříme nyní rozpadové šířky K^0_S a K^0_L v hadronových kanálech. Opět vidíme, že K^0_L se nerozpadá na dva piony, zatímco K^0_S se rozpadá téměř výhradně na dva piony:

$$\Gamma^\mathrm{had}_\mathrm{L} = \Gamma_{2\pi} + \Gamma_{3\pi} - (\gamma_{2\pi} + \gamma_{3\pi}) = 0\cdot\Gamma_{2\pi} + (\approx 2)\cdot\Gamma_{3\pi} \qquad (11.8a)$$
$$\Gamma^\mathrm{had}_\mathrm{S} = \Gamma_{2\pi} + \Gamma_{3\pi} + (\gamma_{2\pi} + \gamma_{3\pi}) = 2\cdot\Gamma_{2\pi} + (\approx 0)\cdot\Gamma_{3\pi} \qquad (11.8b)$$

Příklad 11.6. Ukažte, že v případě zachování kombinované parity CP platí pro pravděpodobnosti přechodu $P_{\mathrm{K}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t) = P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0}(t)$, zatímco rovnost $P_{\mathrm{K}^0\to\mathrm{K}^0}(t) = P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t)$ je důsledkem CPT symetrie.

Řešení: Vyjdeme ze vztahů (A:11.32a)–(A:11.32b), ze kterých vyplývá

$$|\mathrm{K}^0\rangle = \frac{1}{2p}\left(|\mathrm{K}^0_\mathrm{L}\rangle + |\mathrm{K}^0_\mathrm{S}\rangle\right) \qquad (11.9a)$$
$$|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle = \frac{1}{2q}\left(|\mathrm{K}^0_\mathrm{S}\rangle - |\mathrm{K}^0_\mathrm{L}\rangle\right). \qquad (11.9b)$$

Pro časové vývoje stavů dostaneme

$$|\mathrm{K}^0(t)\rangle = f_+(t)|\mathrm{K}^0\rangle - \frac{q}{p} f_-|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle \tag{11.10a}$$

$$|\bar{\mathrm{K}}^0(t)\rangle = f_+(t)|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle - \frac{p}{q} f_-|\mathrm{K}^0\rangle, \tag{11.10b}$$

kde jsme pro zjednodušení zápisu označili

$$f_\pm(t) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2\hbar}\Gamma_\mathrm{L}t}e^{-\frac{i}{\hbar}M_\mathrm{L}t} \pm e^{-\frac{1}{2\hbar}\Gamma_\mathrm{S}t}e^{-\frac{i}{\hbar}M_\mathrm{S}t}\right). \tag{11.11}$$

Pro pravděpodobnosti přechodů pak vyplývá:

$$P_{\mathrm{K}^0\to\mathrm{K}^0}(t) = \left|\langle\mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0(t)\rangle\right|^2 = |f_+(t)|^2 \tag{11.12a}$$

$$P_{\mathrm{K}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t) = \left|\langle\bar{\mathrm{K}}^0|\mathrm{K}^0(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{q}{p}\right|^2 |f_-(t)|^2 \tag{11.12b}$$

$$P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0}(t) = \left|\langle\mathrm{K}^0|\bar{\mathrm{K}}^0(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{p}{q}\right|^2 |f_-(t)|^2 \tag{11.12c}$$

$$P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t) = \left|\langle\bar{\mathrm{K}}^0|\bar{\mathrm{K}}^0(t)\rangle\right|^2 = |f_+(t)|^2 \tag{11.12d}$$

Vidíme tedy, že v případě $|q/p| = 1$ (CP-zachování) jsou stejné pravděpodobnosti přechodu $P_{\mathrm{K}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t)$ a $P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\mathrm{K}^0}(t)$, zatímco rovnost $P_{\mathrm{K}^0\to\mathrm{K}^0}(t) \equiv P_{\bar{\mathrm{K}}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t)$ je důsledkem CPT symetrie:

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0(t)\rangle &= \langle\mathrm{K}^0|e^{-i\hat{H}t}|\mathrm{K}^0\rangle = \langle\mathrm{K}^0|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}e^{-i\hat{H}t}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})|\mathrm{K}^0\rangle = \\ &= \langle\bar{\mathrm{K}}^0|\hat{T}^{-1}e^{-i\hat{H}t}\hat{T}|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle = \langle\bar{\mathrm{K}}^0|e^{+i\hat{H}t}|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle = \langle\bar{\mathrm{K}}^0|\bar{\mathrm{K}}^0(t)\rangle^*\end{aligned}$$

Příklad 11.7. Odvoďte vztah pro rozdíl hmot mezonů K^0_S a K^0_L, znáte-li naměřenou periodu oscilací ($L_\mathrm{osc} = 350$ mm) nábojové asymetrie leptonů $\mathcal{A}_\ell$.

Řešení: Pro periodu oscilací L_osc zřejmě platí

$$2\pi = \frac{(|M_\mathrm{L} - M_\mathrm{S}|)t}{\hbar} = \frac{(|M_\mathrm{L} - M_\mathrm{S}|)ct}{\hbar c} = \frac{(|M_\mathrm{L} - M_\mathrm{S}|)L_\mathrm{osc}}{\hbar c}$$

a tedy pro rozdíl hmot dostáváme

$$|M_\mathrm{L} - M_\mathrm{S}| = \frac{2\pi\hbar c}{L_\mathrm{osc}} = \frac{6{,}28 \times 197 \cdot 10^6\ \mathrm{eV} \times 10^{-15}\ \mathrm{m}}{0{,}35\ \mathrm{m}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$$

Příklad 11.8. Předpokládejte, že se v oscilacích K-mezonů zachovává kombinovaná parita CP. Mějme čistý svazek K^0 o celkové hybnosti $2m_{\mathrm{K}^0}$.

- Určete, v jaké nejmenší vzdálenosti l_0 bude stejná intenzita K^0 a $\bar{\mathrm{K}}^0$, probíhá-li svazek vakuem.

- Ve vzdálenosti $2l_0/3$ měříme rozpady typu

$$\mathrm{K} \to \pi + \mathrm{e} + \nu_\mathrm{e} \tag{11.13}$$

Určete poměr počtu naměřených elektronů a pozitronů $N(\mathrm{e}^-)/N(\mathrm{e}^+)$.

Řešení: V oddíle A:11.1.2 jsme pro pravděpodobnosti přechodů odvodili výrazy (viz též příklad 11.6)

$$P_{\mathrm{K}^0\to\mathrm{K}^0}(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{S}t} + e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{L}t} + 2\cos\left(\frac{M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}}{\hbar}\,t\right)e^{-\frac{1}{\hbar}\frac{\Gamma_\mathrm{S}+\Gamma_\mathrm{L}}{2}t}\right) \tag{11.14a}$$

$$P_{\mathrm{K}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{S}t} + e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{L}t} - 2\cos\left(\frac{M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}}{\hbar}\,t\right)e^{-\frac{1}{\hbar}\frac{\Gamma_\mathrm{S}+\Gamma_\mathrm{L}}{2}t}\right) \tag{11.14b}$$

Aby byla intenzita K^0 a $\bar{\mathrm{K}}^0$ stejná, musí platit podmínka

$$\frac{|M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}|}{\hbar}\,t = \frac{\pi}{2}. \tag{11.15}$$

V rovnici (11.15) vystupuje vlastní čas (v soustavě spojené s K-mezonem), pro vzdálenost v laboratorním systému proto platí:

$$l_0 = \gamma\beta ct = \frac{\gamma\beta\pi\hbar c}{2\,|M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}|} \approx 18\ \mathrm{cm}, \tag{11.16}$$

neboť podle zadání je $\gamma\beta = 2$.

Podle výběrového pravidla (A:6.23) pro semileptonové rozpady hadronů se v přírodě realizují rozpady $\mathrm{K}^0 \to \ell^+ + X$, $\bar{\mathrm{K}}^0 \to \ell^- + X$. Ve vzdálenosti $2l_0/3$ je

$$\cos\left(\frac{M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}}{\hbar}\,t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

dosazením do vztahů (11.14a), (11.14b) dostaneme výsledek

$$\frac{N(\mathrm{e}^-)}{N(\mathrm{e}^+)} = \left.\frac{P_{\mathrm{K}^0\to\bar{\mathrm{K}}^0}(t)}{P_{\mathrm{K}^0\to\mathrm{K}^0}(t)}\right|_{t=\frac{\pi\hbar}{3|M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}|}} = \left.\frac{e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{S}t} + e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{L}t} - e^{-\frac{1}{\hbar}\frac{\Gamma_\mathrm{S}+\Gamma_\mathrm{L}}{2}t}}{e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{S}t} + e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma_\mathrm{L}t} + e^{-\frac{1}{\hbar}\frac{\Gamma_\mathrm{S}+\Gamma_\mathrm{L}}{2}t}}\right|_{t=\frac{\pi\hbar}{3|M_\mathrm{S}-M_\mathrm{L}|}} \approx$$
$$\approx 0{,}54.$$

Příklad 11.9. Určete poměr amplitud $|\mathcal{M}_\mathrm{fi}|$ rozpadů

$$\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^0 \tag{11.17a}$$

$$\mathrm{K}^0 \to \pi + \pi \tag{11.17b}$$

Při výpočtu použijte větvicí poměry a střední doby života uvedené v tabulkách [1] a předpokládejte zachování kombinované parity CP.

Řešení: V obou případech jde o dvoučásticové rozpady částic, jejichž hmoty jsou prakticky stejné. Hmoty částic ve finálním stavu jsou také téměř stejné, fázové